Minimalt spännande träd i viktad graf

Ett spännande träd för en graf G är en delgraf till G som är ett träd (sammanhängande, har inga cykler) och innehåller alla hörn i G.

Vikten för ett spännande träd är summan av dom ingående kanternas vikter.

Prims algoritm:

Indata: Graf $G=\langle V,E\rangle$, kantvikter $f: E\to\mathbb{R}$, starthörn s

Utdata: Ett minimalt spännande träd för G lagrat med faderspekare $\pi(u)$

$\text{Prim}(V,E,f,s) =$

$Q \leftarrow V$
för varje $u\in Q$:
  $\text{key}[u] \leftarrow \infty$
$\text{key}[s] \leftarrow 0$ (Q är en heap med s överst)
$\pi[s] \leftarrow \text{NIL}$
while $Q \neq \emptyset$ do
  $u \leftarrow \text{HeapExtractMin}(Q)$
  för varje granne v till u:
    if $v\in Q$ and $f(u,v) < \text{key}(v)$ then
      $\pi[v] \leftarrow u$
      $\text{key}[v] \leftarrow f(u,v)$ (här måste v flyttas i heapen)

Tidskomplexitet: $\mathcal{O}(|V|\log|V| + |E|\log|V|) = \mathcal{O}(|E|\log|V|)$

Minimalt spännande träd, Kruskal

Kruskals algoritm:

Indata: Graf $G=\langle V,E\rangle$, kantvikter $f: E\to\mathbb{R}$

Utdata: Ett minimalt spännande träd för G lagrat som en kantmängd $A\subseteq E$.

$\text{Kruskal}(V,E,f) =$

$A \leftarrow \emptyset$
för varje $u\in V$
  $\text{MakeSet}(u)$
sortera kanterna i E efter stigande vikt
för varje kant $(u,v)\in E$ i stigande viktsordning:
  if $\text{FindSet}(u) \neq \text{FindSet}(v)$ then
    $A \leftarrow A \cup \{(u,v)\}$
    $\text{Union}(u,v)$
returnera A

Komplexitetsanalys:

$\text{MakeSet}(u)$ tar tid $\mathcal{O}(1)$
FindSet och Union tar tid $\mathcal{O}(\log|V|)$
sorteringen av E tar tid $\mathcal{O}(|E|\log|E|)$
Totalt: $\mathcal{O}(|V|\cdot 1 + |E|\log|E| + |E|\log|V|) = \mathcal{O}(|E|\log|E|)$ om grafen är sammanhängande

Korrekthet för Prim och Kruskal

Idé: Visa att varje kant som läggs till i algoritmen är säker, dvs ingår i något MST.

Definitioner:

- Ett **snitt** (cut) är en delning av V i S och $V-S$.
- En kant **korsar** snittet om ena änden $\in S$ och andra $V-S$.

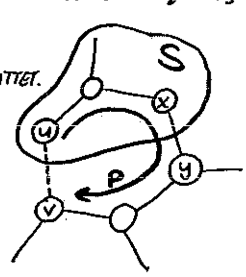
Sats: Givet $G=\langle V,E\rangle$, $f: E\to\mathbb{R}$, $A\subseteq E$, $S\subseteq V$. Om
- det finns ett MST som innehåller A,
- ingen kant i A korsar snittet $(S, V-S)$,
- (u,v) är det lättaste kant som korsar snittet

så är (u,v) säker att lägga till, dvs det finns ett MST som innehåller $A\cup\{(u,v)\}$.

Bevis: Låt T vara MST som innehåller A men inte (u,v).
Konstruera T' som är ett MST och innehåller $A\cup\{(u,v)\}$:

T innehåller stig p mellan u och v.
Det finns kant (x,y) i p som korsar snittet.
Låt $T' = T\cup\{(u,v)\} - \{(x,y)\}$.

T' är uppenbart ett spännande träd
(u,v) är den lättaste korsande kanten
$\Rightarrow f(u,v) \le f(x,y) \Rightarrow |T'| \le |T|$
$\Rightarrow T'$ är MST.



ALGORITM FÖR GRAFPROBLEMET "KORTASTE STIG"

DIJKSTRAS ALGORITM:

INDATA: $G=\langle V,E\rangle$, $f: E \to \mathbb{N}$, $s \in V$, $t \in V$

UTDATA: LÄNGDEN AV DEN KORTASTE STIGEN I G FRÅN s TILL t

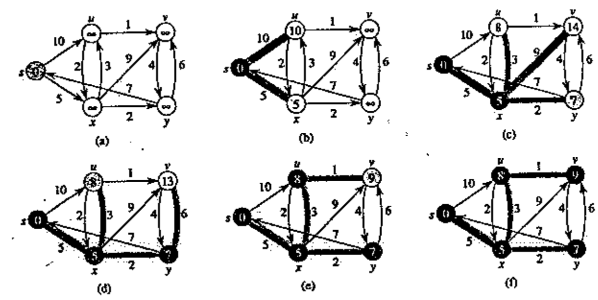
MÄRK VARJE HÖRN MED DET HITTILLS KORTASTE KÄNDA AVSTÅNDET FRÅN S.

UPPRÄTTA EN MÄNGD S MED DOM HÖRN TILL VILKA DEN OPTIMALA KORTASTE STIGEN ÄR KÄND.

ALGORITM:

1. FÖR VARJE HÖRN $u \in V$:
   OM $(s,u) \in E$ MÄRK u MED $f(s,u)$
   ANNARS MÄRK u MED ∞
2. MÄRK s MED 0 OCH LÅT $S=\{s\}$
3. SÅ LÄNGE $t \notin S$:
   UTVIDGA S MED DET HÖRN SOM ÄR MÄRKT MED DET KORTASTE AVSTÅNDET OCH UPPDATERA HÖRNMÄRKNINGEN
4. RETURNERA AVSTÅNDET SOM t ÄR MÄRKT MED

EXEMPEL PÅ DIJKSTRAS ALGORITM:



ANALYS:

S UTVIDGAS $|V|$ GÅNGER (HÖGST).

VID VARJE UTVIDGNING LETAR MAN UPP DET HÖRN SOM ÄR MÄRKT MED KORTASTE AVSTÅNDET: $O(|V|)$

UPPDATERING AV HÖRNMÄRKNINGEN GÖRS HÖGST EN GÅNG FÖR VARJE KANT I GRAFEN: $O(|E|)$

INITIERING AV S OCH MÄRKNINGEN TAR TID $O(|V|+|E|)$

TOTALT: $O(|V|^2+|E|+|V|+|E|) = O(|V|^2)$

(EFTERSOM $|E| \in O(|V|^2)$)

KORREKTHET FÖR DIJKSTRAS ALGORITM

LÅT $\delta(s,v)$ VARA DET KORTASTE AVSTÅNDET FRÅN S TILL V.

LÅT $d[v]$ VARA HÖRNET V-S MÄRKNING I ETT LÄGE I ALGORITMEN.

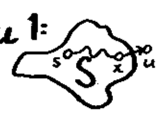
BEVISSKISS:

NOTERA ATT $d[v] \geq \delta(s,v)$ ALLTID GÄLLER FÖR ALLA HÖRN.

INDUKTION ÖVER S:

BASFALL: $S=\{s\}$, $d[s]=0$, $\delta(s,s)=0$ **OK!**

INDUKTIONSSTEG: VISA ATT OM $d[v]=\delta(s,v)$ FÖR ALLA $v \in S$ NÄR u JUST SKA LÄGGAS TILL S SÅ ÄR $d[u]=\delta(s,u)$.

FALL 1:  KORTASTE STIGEN FRÅN S TILL U GÅR HELT INUTI S UTOM SISTA KANTEN (x,u).

ANTAGANDET $\Rightarrow d[x]=\delta(s,x)$

ALGORITMEN SATTE $d[u]=d[x]+f(x,u)=\delta(s,x)+f(x,u)=\delta(s,u)$ **OK!**

FALL 2:  LÅT y VARA FÖRSTA HÖRNET UTANFÖR S I KORTASTE STIGEN FRÅN S TILL u.

FALL 1 $\Rightarrow d[y]=\delta(s,y) \leq \delta(s,u)$

ALGORITMEN LÄGGER TILL u FÖRE $y \Rightarrow d[u] \leq d[y]$

VI HAR NU: $d[y] \leq \delta(s,u) \leq d[u] \leq d[y]$

$\Rightarrow d[y]=\delta(s,u)=d[u]$ **OK!**

ALLA HÖRN SOM KAN NÅS FRÅN S KOMMER MED I S. ÖVRIGA HAR $d[v]=\infty$