Föreläsning 5: Dynamisk programmering

Vi betraktar en typ av problem vi tidigare sett:

Indata: En uppsättning intervall $[s_i, f_i]$ med vikt w_i.

Mål: Att hitta en uppsättning icke överlappande intervall med maximal viktsumma.

Tänk så här: Låt O vara ett optimalt val. Vi tänker baklänges ut hur det måste se ut. Antag att intervallen är sorterade efter växande sluttid. Finns intervall n med eller inte?

1. Intervall n finns inte med i O. Då är O ett optimalt val av intervallen $1, ..., n-1$.

2. Intervallet n finns med. Låt k vara det största index så att intervall k går att förena med intervall n. Då måste O innehålla ett optimalt urval O' av intervallen $1, ..., k$.

Def: Låt $M[i]$ = vikten av det bästa urvalet bland intervallen $1, ..., i$.

Rekursionsformel:

$$M[k] = \begin{cases} w_1 & k = 1 \\ max(M[k-1], M[j] + w_k) & \text{annars} \end{cases}$$

I rekursionen är j maximalt så att intervall j går att förena med intervall k.

Vi vill beräkna $M[n]$. Värdet kan beräknas i tid $O(n)$.

Principen bakom DynP är att bara lösa samma problem en gång. Genom att spara redan uträknade resultat i en tabell och slå upp i den för varje delproblem som ska lösas kan detta åstadkommas.
Flödesschema:

(1)	Bestäm utseendet hos en optimal lösning.
(2)	Sätt upp en rekursionsekvation för optimalvärdet.
(3)	Tabulera optimalvärdena för olika delproblem (rekursivt eller från små problem till större).
(4)	Konstruera optimallösningen.

Vid konstruktion av DynP-algoritmer fokuserar man vanligen på *värdet* av lösningen, inte så mycket på lösningens utseende.

Exempel på DynP

Problem: Givet talföljd $x_1, x_2, ..., x_n$ vill vi beräkna längden av längsta konsekutiva delföljden av växande tal.
Låt $v(i)$ = längden av längsta sekvens som slutar i x_i.

Algoritm:

```
(1)     v(1) ← 1
(2)     for i = 2 to n
(3)         if x(i − 1) ≤ x(i)
(4)             v(i) ← v(i − 1) + 1
(5)         else
(6)             v(i) ← 1
(7)     return v
```

Sedan beräknas $\max_i v(i)$.

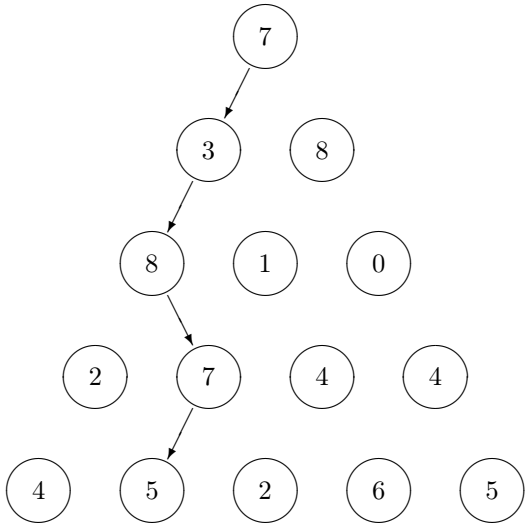
Problem: Samma problem men utan att följderna behöver vara konsekutiva.
Metod: Definiera $v(i)$ som ovan. Vi har nu rekursionssambandet

$$v[1] = 1 \qquad\qquad c[i,j] = \begin{cases} 1 & x[i] \leq x[j] \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

$$v[i] = max_{1 \leq k \leq i}\{v[k]c[k,i] + 1\}$$

Beräkna först alla $v[i]$. Bestäm sedan $\max_i v[i]$.

Problem: Hitta stigen från toppen till botten som maximerar summan av de ingående talen.



Låt a_{ij} vara elementet på rad i, kolumn j.
Låt $V[i,j]$ vara värdet på bästa stigen från (i,j) ner till rad n. Då gäller

$$V[i,j] = \begin{cases} a_{ij} & i = n, \\ a_{ij} + \max\{V[i+1,j], V[i+1,j+1]\} & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkning av alla $V[i,j]$:

```
(1)   for j = 1 to n
(2)       V[n, j] ← a_nj
(3)   for i = n − 1 downto 1
(4)       for j = 1 to i
(5)           V[i, j] ← a_ij +
              max{V[i + 1, j], V[i + 1, j + 1]}
```

Körtiden blir $\Theta(n^2)$ för att hitta $V[1,1]$, värdet av den bästa stigen. Minnesåtgången är också $\Theta(n^2)$.

När dynamisk programmering fungerar

Dynamisk programmering fungerar vanligen när
1. Problemet kan delas upp i delproblem.
2. Problemet kan lösas genom ett girigt val som leder till en delproblemsuppdelning.
3. Lösningarna på delproblemen på ett naturligt sätt kan lagras i en array.
4. Värdena på arrayen kan beräknas relativt enkelt genom en rekursionsekvation.

Problem: DELSUMMA
Input: En följd av positiva heltal $a_1, a_2, ..., a_n$ och ett heltal M.
Problem: Avgör om det finns en delföljd av talen vars summa är exakt M.
Går att lösa med dynamisk progrmmering. Sätt

$$V[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{om det går att få summa } j \text{ med de } i \text{ första talen,} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Initiering:

$$\begin{cases} v[1, a_1] = 1 \\ v[1, 0] = 1 \\ v[1, j] = 0 \quad \text{annars} \end{cases}$$

Rekursion:

$$V[i,j] = \begin{cases} 1 & v[i-1, j] = 1 \text{eller} v[i-1, j-a_i] = 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Algoritmen går i $O(Mn)$. Eftersom indatas storlek är n och $\log M$ är detta inte en riktig polynomiell algoritm.

Floyd-Warshalls algoritm

I boken presenteras Bellman-Fords algoritm som ett exempel på en DynP-algoritm för beräkning av kortaste avstånd i grafer med negativa kantvikter.

Givet en graf $G = (V, E)$ med vikter w_{ij} på kanterna. Om $(v_i, v_j) \notin E$ är $w_{ij} = \infty$. Bestäm kortaste avstånden mellan varje par av hörn i G!
Låt $d[i, j, k]$ vara kortaste avståndet mellan v_i och v_j inskränkt till stigar där bara hörnen $v_1, \ldots, v_k$ förekommer (utöver v_i och v_j).

Då är $d[i,j,0] = w_{ij}$ om $i \neq j$ och $d[i,i,0] = 0$. Sedan gäller följande rekursionssamband:
$d[i,j,k] = \min\{d[i,j,k-1], d[i,k,k-1] + d[k,j,k-1]\}$
för $k \geq 1$.
De kortaste avstånden vi är ute efter svarar mot $d[i,j,n]$ där n är antalet noder. Följande algoritm beräknar alla d-värden:

```
FLOYD-WARSHALL(G = ⟨V, E⟩, W)
(1)   n ← dim(W)
(2)   for i ← 1 to n
(3)       for j ← 1 to n
(4)           d[i, j, 0] ← w_ij
(5)   for k ← 1 to n
(6)       for i ← 1 to n
(7)           for j ← 1 to n
(8)               d[i, j, k] ← min(d[i, j, k − 1], d[i, k, k − 1] + d[k, j, k − 1])
(9)   return d
```

Algoritmen arbetar i tid $O(|V|^3)$. Det kan verka som om algoritmen på samma tid som Bellman-Fords algoritm klarar av att beräkna **alla** avstånd. Men lägg märke till att BF arbetar i tid $O(|V||E|)$ vilket för glesa grafer är mindre. Negativa cykler kan hittas genom att man testar om $d[i,i,k] < 0$ för några i, k.