

Algoritmer och komplexitet hösten 2007

Mästarprov 2: Komplexitet

Mästarprovet ska lösas **individuellt** och redovisas både skriftligt och muntligt. Inget samarbete är tillåtet, se vidare hederskodexen.

Skriftliga lösningar ska lämnas senast **6 dec** på föreläsningen eller senast klockan 10.00 samma dag i kursens inlämningslåda på studentexpeditionen på Osquars backe 2 plan 2. Det är viktigt att du lämnar in i tid! Se till att spara en kopia av dina lösningar så att du kan läsa på inför den **muntliga redovisningen** som kommer att ske senare samma vecka för någon av lärarna. Boka tid för en femton minuters muntlig redovisning på hemsidan. Redovisningstider kommer att läggas upp senast den 4 dec.

Mästarprovet är ett obligatoriskt och betygsatt moment i kursen. Det består av tre uppgifter med olika svårighetsgrad. För godkänt d.v.s. betyg E krävs helt rätt på en av uppgifterna. Helt rätt på två av uppgifterna ger betyg C och alla rätt ger betyg A. Läs mer om betygsriterier och slutbetyg i kurs-PM eller på kursens webbsida.

1. Supervänkrets (Lätt)

Grafteori kan tillämpas på en stor mängd olika nätverk. Vi kan t.ex. ta fenomenet Facebook. Där har vi något som i princip är en graf med olika medlemmar i Facebook som noder. En kant mellan två noder anger att motsvarande medlemmar är vänner. Vi antar nu att en datalog gör följande iakttagelse.

Vissa personer har många vänner. Vi väljer något tal S och säger att en person som har minst S vänner är en *supervän*. Datalogen har nu en förmodan och det är att sådana supervänner lär känna varandra. Han försöker därför hitta stora grupper av supervänner. Han inser att det finns ett naturligt optimeringsproblem som han formulerar som:

SUPERVÄNKRETS

INDATA: En graf G som motsvarar en del av Facebook och ett heltal S .

MÅL: Storleken på den största möjliga mängden av supervänner, d.v.s. personer som alla har minst S vänner, som alla känner varandra.

Din uppgift är att formulera motsvarande beslutsvariant av problemet och visa att det är NP-fullständigt. Gör det genom att visa att beslutsproblemet ligger i NP och genom att reducera ett känt NP-fullständigt problem till det nya problemet.

2. Disjunkta vektorer (Medelsvår)

Vi har en mängd med vektorer i $\mathbf{R}^n$. Givet en vektor $\bar{v}$ säger vi att *stödet* för $\bar{v}$ är mängden $\{i : v_i \neq 0\}$. Vi säger sedan att två vektorer är *disjunkta* om deras stöd är disjunkta som mängder (d.v.s saknar gemensamma element). Givet en uppsättning m vektorer studerar vi nu problemet att hitta en mängd med k st vektorer som alla är parvis disjunkta. Visa att detta problem är NP-fullständigt.

3. Arvsskifte (Svår)

Två personer; syster S och broder B skall dela ett arv som består av n st olika föremål. Dessa föremål har uppskattade värden $v_1, v_2, \dots, v_n$. Dessa värden är heltal. Det sammanlagda värdet på dessa föremål är 3 150 400 kr. Av vissa skäl vill de att systemen skall få saker till ett värde som är 20 procent större än det värde brodern får. Vi ser att det innebär att hon får saker värda 286400 kr mer än hans saker. Men när de skall fördela sakerna upptäcker de att det verkar vara svårt att få exakt den önskade differensen. De vänder sig därför till kusin K som jobbar på KTH. Han designar en algoritm som löser följande problem:

Givet positiva heltal $v_1, v_2, \dots, v_n$ och ett positivt heltal K så avgör algoritmen om det går att partitionera talen i två delar så att differensen mellan dellarnas summa är exakt K . Algoritmen kan troligen inte vara effektiv. Förklara varför! Men syskonen kör algoritmen och den visar att det går att dela upp talen så att värdesummorna får en differens på exakt 286400 kr. Men de vet inte hur de skall dela upp talen.

Kalla kusin K:s algoritm för $F(v, K)$. Beskriv en algoritm som visar exakt hur uppdelningen skall göras för att få differensen K genom att anropa F . Antalet anrop måste vara polynomiellt i n .