

Linjärprogrammering

Ett linjärprogrammeringsproblem på allmän form ser ut som

$$\text{Minimera } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\begin{aligned} \text{då} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Variant: Vi kan vilja maximera istället.

Vi kommer att studera följande exempel flera gånger.

Firman Fajo AB

Firman Fajo tillverkar bandyklubbor och ishockeyklubbor.

Det finns två produktionsmoment: Sågning och limning.

Vi har följande tidsåtgång

	Sågning	Limning	
Ishockey	7	16	(i minuter)
Bandy	10	12	

Firman har kapacitet för 3600 minuters sågning och 5400 minuters limning per vecka.

Klubborna kan säljas för

Ishockey: 125 kr men har en produktionskostnad på 105 kr.

Bandy: 115 kr men har en produktionskostnad på 97 kr.

Låt x_1 vara antalet tillverkade ishockeyklubbor och x_2 antalet tillverkade bandyklubbor.

Vi får problemet

$$\text{Maximera } z = 20x_1 + 18x_2$$

då

$$7x_1 + 10x_2 \leq 3600$$

$$16x_1 + 12x_2 \leq 5400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Obs: Kan överföras till allmän form genom att vi minimerar $-20x_1 - 18x_2$

En likhet som t.ex. $3x_1 + 4x_2 = 100$ kan skrivas som två olikheter

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 100$$

Vi vill hitta en metod för att lösa LP-problem.

Simplexmetoden

Förberedelse: Vi går från allmän form till standardform.

Standardform: Vi har likheter istället för olikheter.

Ex:

$$\text{Minimera } z = 3x_1 + 5x_2 - x_3$$

då

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Trick för att få likheter: Slackvariabler.

$$\text{Ex:} \quad \text{Vi har först } x_1 + 3x_2 \leq 10$$

$$\text{Vi sätter } x_3 = 10 - (x_1 + 3x_2)$$

x_3 är en ny slackvariabel.

$$\text{Vi får likheten } x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$$

Färd-problemet på standardform blir

$$7x_1 + 10x_2 \leq 3600 \text{ görs om till } 7x_1 + 10x_2 + x_3 = 3600$$

$$16x_1 + 12x_2 \leq 5400 \text{ görs om till } 16x_1 + 12x_2 + x_4 = 5400$$

Vi får

$$\text{Maximera } z = 20x_1 + 18x_2$$

$$\begin{aligned} \text{då} \quad & 7x_1 + 10x_2 + x_3 = 3600 \\ & 16x_1 + 12x_2 + x_4 = 5400 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Abstrakt formulering av standardform

$$\text{Minimera} \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\begin{aligned} \text{då} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Genom att införa matriser kan vi skriva

$$\text{Minimera} \quad \bar{c}^T \bar{x}$$

$$\begin{aligned} \text{då} \\ A\bar{x} &= \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0} \end{aligned}$$

Exempel: Få igen.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 7 & 10 & 1 & 0 \\ 16 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \bar{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \bar{c} &= \begin{pmatrix} -20 \\ -18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{b} &= \begin{pmatrix} 3600 \\ 5400 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Minimera} \quad (-20 \quad -18 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{då} \\ \begin{pmatrix} 7 & 10 & 1 & 0 \\ 16 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &\leq \begin{pmatrix} 3600 \\ 5400 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

För enkelhets skull kan vi gå tillbaka till att maximera $z = 20 x_1 + 18 x_2$.
Var finns den optimala lösningen?

I Fajo-problemet måste

$$\begin{aligned} 7 x_1 + 10 x_2 + x_3 &= 3600 \\ 16 x_1 + 12 x_2 + x_4 &= 5400 \end{aligned}$$

En möjlighet är att $x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{aligned} 7 x_1 + 10 x_2 &= 3600 \\ 16 x_1 + 12 x_2 &= 5400 \end{aligned}$$

Lösning av systemet ger $x_1 \approx 142$ $x_2 \approx 260$

Det ger $z \approx 7520$

Men vi kan också t.ex. sätta $x_2 = x_4 = 0$

Det ger ekvationerna

$$\begin{aligned} 7 x_1 + x_3 &= 3600 \\ 16 x_1 &= 5400 \end{aligned}$$

Det ger $x_1 \approx 337$ $x_3 \approx 1237$

Då blir $z \approx 2362$.

Det är sämre.

Finns det fler möjligheter?

Baslösning:

Antag att det finns n variabler och m ekvationer. Antag att $n-m$ variabler sätts till 0.

Då är de övriga m variablerna entydigt bestämda. Detta är en baslösning.

Tillåten baslösning:

Om alla variabler är ≥ 0 har vi en tillåten baslösning.

Lösningen till ett LP-problem är alltid en tillåten baslösning.

Men vilken baslösning?

Det finns många möjliga baslösningar att testa.

Metod:

Variabler som är 0 är **icke-basvariabler**. De övriga är **basvariabler**.

Vi testar olika baslösningar genom att byta basvariablerna en i taget.

Exempel: Minimera $z = 2x_1 + x_2$

$$\text{då } 3x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sätt $x_1 = 0$

.

Då är $x_2 = 10$

Då är $z = 10$.

Byt så att $x_2 = 0$.

Då är $x_1 \approx 3,33$

Då blir $z \approx 6,67$.

Det är bättre.

Hur vet man att man hittat den bästa baslösningen?

Ex: Fajo

$$x_1 = 142x_2 = 260z = 7520$$

Hur vet vi att den lösningen är bäst?

Vi kan skriva

$$x_3 = 3600 - 7x_1 - 10x_2$$

$$x_4 = 5400 - 16x_1 - 12x_2$$

$$x_1 = 0,158x_3 - 0,132x_4 + 142,1$$

$$x_2 = -0,2x_3 + 0,092x_4 + 260,5$$

$$\begin{aligned} \text{Det ger } z &= 20x_1 + 18x_2 = 20(0,15x_3 - 0,13x_4 + 142,1) + 18(-0,21x_3 + \\ &0,09x_4 + 260,5) = \\ &7520 - 0,62x_3 - 0,98x_4 \end{aligned}$$

Vi ser att det inte lönar sig att öka x_3 eller x_4 .
Alltså måste varje ändring vara en försämring.

Strategi för Simplexmetoden

Antag att vi har ett maximeringsproblem och att vi har en baslösning med $y_1, y_2, \dots, y_m$ som basvariabler och $v_1, v_2, \dots, v_{n-m}$ som icke-basvariabler.

Vi har då satt $v_1 = v_2 = \dots = v_{n-m} = 0$

Det går att skriva $y_1, y_2, \dots, y_m$ som funktioner av $v_1, v_2, \dots, v_{n-m}$

$$y_1 = f_1(v_1, \dots, v_{n-m}) \quad y_2 = f_2(v_1, \dots, v_{n-m})$$

...

Då går det att skriva z på formen

$$z = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_{n-m}v_{n-m} + z_0$$

Om alla c_i är < 0 så har vi en optimal lösning.

Om något $c_i > 0$ t.ex. $c_1 > 0$ så lönar det sig att öka v_1 . Då måste värden på y -variablerna ändras. Hur mycket?

Om vi har ett minimeringsproblem lönar det sig att öka variabler med $c_i < 0$. I övrigt är problemet och metoden precis densamma.

Ex:

$$\text{Minimera } z = 2x_1 + 2x_2 + x_3$$

då

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

En lösning är $x_3 = 0$ (icke-basvariabel).

Det ger

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 5 - x_3 \\x_1 - x_2 &= 8 - 2x_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x_1 &= 13 - 3x_3 \\x_1 &= \frac{13}{2} - \frac{3}{2}x_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x_2 &= -3 - x_3 \\x_2 &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3\end{aligned}$$

$$z = 2\left(\frac{13}{2} - \frac{3}{2}x_3\right) + 2\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3\right) + x_3 = 10 - x_3$$

Det lönar sig att öka x_3 . Men hur mycket?

x_1 och x_2 måste vara ≥ 0 .

$$x_1 = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}x_3$$

Det betyder att $x_3 \leq \frac{13}{3}$

$$x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3$$

Det betyder att $x_3 \geq -3$

Det ger begränsningen $x_3 \leq \frac{13}{3}$ för ökning av x_3 .

Om $x_3 = \frac{13}{3}$ är $x_1 = 0$.

$$x_2 \text{ blir } -\frac{3}{2} + \frac{13}{6} = \frac{2}{3}$$

Skriv nu x_2 , x_3 som funktioner av x_1 .

$$x_3 = \frac{13}{3} - \frac{2}{3}x_1$$

$$x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{13}{3} - \frac{2}{3}x_1\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1$$

$$z = 10 - x_3 = 10 - \frac{13}{3} + \frac{2}{3}x_1 = \frac{17}{3} + \frac{2}{3}x_1$$

Här lönar det sig inte att öka x_1 . Vi är klara.

Simplexmetoden med tablåräkning

Ex:

Minimera $z = 30x_1 + 2x_2$

då

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 100 \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 80 \\
x_1 + x_5 &= 40 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Vi startar med $x_1 = x_2 = 0$.

Då är $x_3 = 100$, $x_4 = 80$, $x_5 = 40$.
 $z = 30x_1 + 20x_2$

Vi sätter $z - 30x_1 - 20x_2 = 0$

Vi sammanställer i en **starttablå**.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
	1	-30	-20				
x_3		2	1	1			100
x_4		1					80
x_5		1					40

Positioner som är 0 har inte skrivits ut.

Vi ser att det lönar sig att öka x_1 eller x_2 . Vi ökar x_1 .

Begränsningen är

$$\begin{aligned}
100 - 2x_1 &\geq 0 \\
80 - x_1 &\geq 0 \\
40 - x_1 &\geq 0
\end{aligned}$$

Den snävaste begränsningen är den sista. Vi sätter $x_1 = 40$.
Då gäller $x_5 = 0$

x_1 utgår ur basen och x_5 ingår.

Gör följande i tablå:

Tag sista raden och dra från 4:de och 3:dje.
Tag 2* sista raden och dra från 2:a.
Tag 3* sista raden och lägg till 1:a.

Det ger tablå

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1		-20			30	1200
x_3			1	1		-2	20
x_4			1		1	-1	40
x_1		1				1	40

Tolkningen är

$$z = 1200 + 30x_2 - 30x_5$$

$$x_3 = 20 - x_2 + 2x_5$$

$$x_4 = 40 - x_2 + x_5$$

$$x_1 = 40 - x_5$$

Nu lönar det sig att öka x_2

Begränsningen är 20,40,40. Vi ser att 20 är minst.

Det betyder att x_3 utgår ur basen och att x_2 ingår.

Tag 20* 2:a raden och lägg till 1:a.

Tag 2:a raden och drag från 3:dje.

Det ger tablån

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1			20		-10	1600
x_2			1	1		-2	20
x_4				-1	1	1	20
x_1		1				1	40

Nu lönar det sig att öka x_5 .

Begränsningarna är 20,40.

x_4 utgår ur basen och x_5 ingår.

En beräkning av liknande slag ger tablån

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1			10	10		1800
x_2			1	-1	2		60
x_5				-1	1	1	20
x_1		1		1	-1		20

Nu lönar det sig inte att ändra mer.

Vi har fått en lösning med $z = 1800$

$$x_2 = 60, x_5 = 20, x_1 = 20, x_3 = x_4 = 0$$

Generell beskrivning av metoden

Vi antar att vi har ett maximeringsproblem.

$$\begin{array}{ccccccc} z & x_1 & x_2 & \dots & \dots & \dots & b \\ 1 & c_1 & c_2 & \dots & \dots & \dots & b_0 \\ & & & & & & b_1 \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & \dots \end{array}$$

Hitta icke-basvariabler med c-värde < 0 . (Välj största c-värde.)

Antag att det t.ex. är x_8

$$\begin{array}{ccc} x_8 & \dots & \dots \\ c_8 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i8} & \dots & b_i \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Hitta det värde i som gör $\frac{b_i}{a_{i8}}$ minimalt fast ≥ 0 .

Antag t.ex. att det är $i=5$.

Då skall x_8 in i basen och x_5 ut ur basen.

Reducera så att kolumn 8 består av 1 raden som motsvarar x_5 .

Fortsätt tills ingen icke-basvariabel har negativt c-värde.