

**Lösningar till teoritenta i Algoritmer (datastrukturer) och komplexitet
för KTH DD1352–2354 2009-12-18**

1. (8 p) Är följande påståenden sanna eller falska? För varje deluppgift ger riktigt svar 1 poäng och ett övertygande motiverat riktigt svar 2 poäng.
 - a) Det går att multiplicera två n -bitstal i tid snabbare än $O(n^2)$.
Sant. Med dekomposition (Karatsubas algoritm) kan man komma ned i komplexitet $O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1,59})$
 - b) Dynamisk programmering kan användas för att hitta kortaste vägar i grafer.
Sant. Floyd-Warshalls algoritm är en sådan DynP-algoritm. Dijkstras algoritm kan också sägas vara en DynP-algoritm.
 - c) Det finns NP-problem som inte ligger i klassen PSPACE.
Falskt. Det går att visa att $NP \subseteq PSPACE$.
 - d) Att avgöra om en graf kan 2-färgas är ett NP-fullständigt problem.
Falskt. Det finns en modifiering av BFS-algoritmen som i polynomiell tid avgör om en graf kan 2-färgas. Så problemet $\in P$ och är därför inte NP-fullständigt (om inte $P=NP$).
2. (3 p)
 - (a) Beskriv Dijkstras algoritm för att hitta kortaste vägar i grafer.
 - (b) Beskriv Kruskals eller Prims algoritm för att hitta minimala spännande träd i grafer.
 - (c) Vilka av dessa algoritmer klarar av både positiva och negativa kantvikter som indata.
Ge motivering.

Svar: Se läroboken eller föreläsningssanteckningar. Beskrivningarna behöver inte nödvändigtvis vara i pseudokod men skall förklara huvuddragen i algoritmerna. Dijkstras algoritm klarar inte negativa kantvikter. De två andra algoritmerna klarar negativa kantvikter.

3. (2 p) Problemet EKVIVALENTA TURINGMASKINER är problemet att givet två Turingmaskiner M_1 och M_2 avgöra om de uppträder likadant på alla indata x . Mer exakt menas att för varje indata x gäller att båda inte stannar eller att de stannar med $M_1(x) = M_2(x)$ d.v.s. med samma utdata.

Visa att detta problem är oavgörbart.

Svar: Enklast är att använda problemet STOPP-ALLA(M) :
{ M stannar på alla indata } som är oavgörbart. Vi kan reducera STOPP-ALLA till EKVIVALENTA TURINGMASKINER så här:

Antag att $ET(M_1, M_2)$ är en algoritm som avgör EKVIVALENTA TURINGMASKINER. Givet en instans M av STOPP-ALLA skapar vi en maskin $Stopp(x) = \text{Return } x$. Denna maskin stannar alltid. Sedan gör vi anropet $ET(M, Stopp)$. Svaret avgör STOPP-ALLA-problemet vilket är omöjligt.

4. (3 p)

Problemet PARTITIONERING är att givet en sekvens av heltal $x_1, x_2, \dots, x_n$ avgöra om de gör att dela upp i två disjunkta delar så att delarna ger samma summa. Problemet LÅDPACKNING är att givet reella tal $y_1, y_2, \dots, y_n$ som alla är större än 0 och ett heltal K , avgöra om talen kan packas i K lådor av storlek 1.

Visa hur problemet PARTITIONERING kan reduceras till LÅDPACKNING.

Svar: Låt $x_1, \dots, x_n$ vara instans av PARTITIONERING. Sätt $X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ och $y_i = \frac{2x_i}{X}$ för alla i . Sätt sedan $K = 2$. Då är det lätt att se att $x_1, \dots, x_n$ kan partitioneras $\Leftrightarrow y_1, \dots, y_n$ kan packas i de två lådorna.

5. (4 p)

- (a) Beskriv vad en approximationsalgoritm är. Ge exempel på en sådan algoritm.
- (b) Som vi har sett går inte HANDELSRESANDEPROBLEMET i sin mest generella form att approximera. Men antag att vi har tal $0 < \alpha < \beta$ och en speciell klass av kompletta grafer där som är alla kantvikter w uppfyller $\alpha < w < \beta$. Visa att det då går att konstruera en approximationsalgoritm med approximationskvot $B = \frac{\beta}{\alpha}$.

Svar:

- a. Se beskrivning i läroboken eller föreläsningsanteckningar. Svaret bör innehålla bl.a. att algoritmen skall vara polynomiell i tid och att det skall finnas en approximationskvot.
- b. Välj en Hamiltoncykel godtyckligt. Med givna förutsättningar ser vi att $OPT \geq \alpha n$ eftersom varje Hamiltoncykel måste använda n kanter. På samma ser vi att vår algoritm ger en lösning APP så att $APP \leq \beta n$. Det ger $\frac{APP}{OPT} \leq \frac{\beta n}{\alpha n} \leq \frac{\beta}{\alpha}$ för alla instanser. Alltså får vi $B \leq \frac{\beta}{\alpha}$.

Vill du ha högre betyg på kursen? Om du har fått minst betyg C på två av dom betygsatta kursmomentet (teoritentan, mästarprov 1, mästarprov 2) och minst betyg E på det tredje så får du kontakta mig för en muntlig tenta.