

Algoritmer och Komplexitet ht 09. Övning 4

Dynamisk programmering

Längsta gemensamma delsträng Strängarna ALGORITM och PLÅGORIS har den gemensamma delsträngen GORI. Den *längsta gemensamma delsträngen* hos dessa strängar har alltså längd 4. I en delsträng måste tecknen ligga i en sammanhängande följd.

Konstruera en effektiv algoritm som givet två strängar $a_1a_2 \dots a_m$ och $b_1b_2 \dots b_n$ beräknar och returnerar längden hos den längsta gemensamma delsträngen. Algoritmen ska bygga på dynamisk programmering och gå i tid $O(nm)$.

Talföljder Givet är två följder av positiva heltal $a_1, a_2, \dots, a_n$ och $b_1, b_2, \dots, b_n$ där alla tal är mindre än n^2 samt ett positivt heltal B där $B \leq n^3$. Problemet är att avgöra om det finns någon talföljd $c_1, c_2, \dots, c_n$ så att $\sum_{i=1}^n c_i = B$ och $c_i = a_i$ eller $c_i = b_i$ för $1 \leq i \leq n$.

Beskriv och analysera en algoritm som löser detta problem med hjälp av dynamisk programmering.

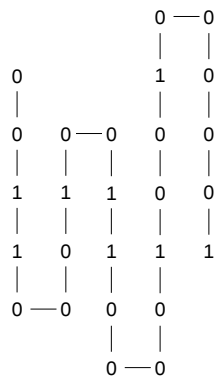
Tala också om hur man ska utvidga algoritmen så den också talar om hur lösningen ser ut, alltså om $c_i = a_i$ eller $c_i = b_i$ för $1 \leq i \leq n$.

Proteinvikning Ett protein är en lång kedja av aminosyror. Proteinkedjan är inte rak som en pinne utan hopvikt på ett intrikat sätt som minimerar den potentiella energin. Man vill väldigt gärna kunna räkna ut hur ett protein kommer att vika sig. I denna uppgift ska vi därför studera en enkel modell av proteinvikning där aminosyror är antingen *hydrofoba* eller *hydrofila*. Hydrofoba aminosyror tenderar att klumpa ihop sig.

För enkelhets skull ser vi proteinet som en binär sträng där ettor motsvarar hydrofoba aminosyror och nollor hydrofila aminosyror. Strängen (proteinet) ska sedan vikas i ett tvådimensionellt kvadratisk gitter. Målet är att få dom hydrofoba aminosyror att klumpa ihop sig, det vill säga att få så många ettor som möjligt att ligga nära varandra. Vi har alltså ett optimeringsproblem där målfunktionen är antalet par av ettor som ligger intill varandra i gittret (lodrätt eller vågrätt) utan att vara intill varandra i strängen.

Du ska konstruera en algoritm som med hjälp av dynamisk programmering konstruerar en optimal *dragspelsvikning* av en given proteinsträng av längd n . En dragspelsvikning är en vikning där strängen först går en sträcka rakt nedåt, sedan en sträcka rakt uppåt, sedan en sträcka rakt nedåt, och så vidare. I en sådan vikning kan man notera att lodräta par av intilliggande ettor alltid kommer i följd i strängen, så det är bara vågräta par av ettor som bidrar till målfunktionen.

I följande figur är strängen 00110001001100001001000001 dragspelsvikt på ett sådant sätt att målfunktionen blir 4.



Definition av problemet PROTEINDRAGSPELSVIKNING:

INMATNING: En binär sträng med n tecken.

PROBLEM: Hitta den dragspelsvikning av indatasträngen som ger det största värdet på målfunktionen, alltså det största antalet par av ettor som ligger bredvid varandra men inte direkt efter varandra i strängen.

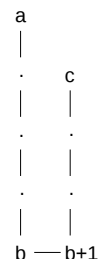
Konstruera och analysera tidskomplexiteten för en algoritm som löser proteindragspelsvikningsproblemet med dynamisk programmering.

Du får gärna använda dig av nedanstående algoritm, som beräknar antalet par ettor i ett varv (dvs mellan två sträckor) i en dragspelsvikning som ligger bredvid varandra (men inte direkt efter varandra i strängen). Anta att proteinet lagras i en array $p[1..n]$. Parametrarna a och b anger index i arrayen för den första sträckans ändpunkter. Parametern c anger index för den andra sträckans slutpunkt. Se figuren nedanför till höger.

```

profit(a,b,c) =
  shortest ← min(b-a, c-(b+1));
  s ← 0;
  for i ← 1 to shortest do
    if p[b-i]=1 and p[b+1+i]=1 then
      s ← s+1;
  return s;

```



Not: Proteinvikningsproblemet är ett viktigt algoritmiskt problem som studeras i bioinformatiken. Det behandlas tillsammans med många andra problem med biologisk anknytning i den valfria kursen *Algoritmisk bioinformatik* som går i period 4 varje år.

Analysator för kontextfri grammatik En *kontextfri grammatik* brukar användas för att beskriva syntax för bland annat programspråk. En kontextfri grammatik i *Chomskynormalform* beskrivs av

- en mängd slutsymboler T (som brukar skrivas med små bokstäver),
- en mängd ickeslutsymboler N (som brukar skrivas med stora bokstäver),
- startsymbolen S (en av ickeslutsymbolerna i mängden N),
- en mängd omskrivningsregler som antingen är på formen $A \rightarrow BC$ eller $A \rightarrow a$, där $A, B, C \in N$ och $a \in T$.

Om $A \in N$ så definieras $\mathcal{L}(A)$ genom

$$\mathcal{L}(A) = \{bc : b \in \mathcal{L}(B) \text{ och } c \in \mathcal{L}(C) \text{ där } A \rightarrow BC\} \cup \{a : A \rightarrow a\}.$$

Språket som genereras av grammatiken definieras nu som $\mathcal{L}(S)$, vilket alltså är alla strängar av slutsymboler som kan bildas med omskrivningskedjor som börjar med startsymbolen S .

Exempel: Betrakta grammatiken med $T = \{a, b\}$, $N = \{S, A, B, R\}$, startsymbolen S och reglerna $S \rightarrow AR$, $S \rightarrow AB$, $A \rightarrow a$, $B \rightarrow b$, $R \rightarrow SB$. Vi kan se att strängen $aabb$ tillhör språket som genereras av grammatiken med hjälp av följande kedja av omskrivningar:

$$S \rightarrow AR \rightarrow aR \rightarrow aSB \rightarrow aSb \rightarrow aABb \rightarrow aaBb \rightarrow aabb.$$

I själva verket kan man visa att det språk som genereras av grammatiken är precis alla strängar som består av k stycken a följt av k stycken b där k är ett positivt heltal.

Din uppgift är att *konstruera* och *analysera* en effektiv algoritm som avgör ifall en sträng tillhör det språk som genereras av en grammatik. Indata är alltså en kontextfri grammatik på Chomskynormalform samt en sträng av slutsymboler. Utdata är sant eller falskt beroende på om strängen kunde genereras av grammatiken eller inte. Ange tidskomplexiteten för din algoritm uttryckt i antalet regler m i grammatiken och längden n av strängen.

Mer om grammatiker kan man läsa i kursen *Artificiella språk och syntaxanalys*.

Lösningar

Lösning till Längsta gemensamma delsträng

Låt $M[i, j]$ vara antal bokstäver till vänster om (och inklusive) a_i som överensstämmer med lika många bokstäver till vänster (och inklusive) b_j . Längden av den längsta gemensamma strängen är då det största talet i matrisen M .

M kan definieras rekursivt på följande sätt:

$$M[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{om } i = 0 \text{ eller } j = 0, \\ M[i-1, j-1] + 1 & \text{om } a_i = b_j, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Följande algoritm beräknar hela M och returnerar det största talet i M .

```

max ← 0
for j ← 0 to n
  M[0, j] ← 0
for i ← 1 to m
  M[i, 0] ← 0
  for j ← 1 to n
    if ai = bj then
      M[i, j] ← M[i-1, j-1] + 1
      if M[i, j] > max then max ← M[i, j]
    else M[i, j] ← 0
return max

```

Tiden domineras av den nästlade for-slingan och är alltså $\Theta(nm)$. □

Lösning till Talföljder

Vi skapar en boolesk $n \times B$ -matris M som från början är fylld med nollor. En etta i $M[k, s]$ ska betyda att det finns något val av $c_1, \dots, c_k$ så att $\sum_{i=1}^k c_i = s$. Rekursionsekvationen för $M[k, s]$ blir:

$$M[k, s] = \begin{cases} 1 & \text{om } k = 1 \text{ och } (s = a_1 \text{ eller } s = b_1), \\ 1 & \text{om } k > 1 \text{ och } (M[k-1, s-a_k] = 1 \text{ eller } M[k-1, s-b_k] = 1), \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkningen börjar med att $M[1, a_1]$ och $M[1, b_1]$ sätts till 1. Därefter sätter man ettor i $M[2, a_1 + a_2]$, $M[2, a_1 + b_2]$, $M[2, b_1 + a_2]$ och $M[2, b_1 + b_2]$ i den andra raden av matrisen, sedan sätter man ettor i den tredje raden och så vidare. Om det hamnar en etta i $M[n, B]$ så är svaret på problemet ja.

Algoritmen kan se ut så här i C:

```
int ExistsC(int n, int a[], int b[], int B)
{ char M[n + 1][B + 1]; /* Dynamiska matriser är ett tillägg i gcc */
  int i, j;
  for (i = 1; i <= n; i++)
    for (j = 1; j <= B; j++) M[i][j] = 0;
  M[1][a[1]] = M[1][b[1]] = 1;
  for (i = 2; i <= n; i++)
    for (j = 1; j <= B; j++) {
      if (j - a[i] > 0 && M[i - 1][j - a[i]]) M[i][j] = 1;
      if (j - b[i] > 0 && M[i - 1][j - b[i]]) M[i][j] = 1;
    }
  return M[n][B];
}
```

Satserna inuti den dubbla forslingen utförs $(n - 1)B$ gånger och i dom satserna utförs högst 4 jämförelser och 2 tilldelningar, dvs ett konstant antal. Hela algoritmen går alltså i $O(n^2) + O((n - 1)B) = O(n^2 + nB) \subseteq O(n^4)$.

Genom att gå bakifrån (från den n -te raden och uppåt) och undersöka i vilka positioner det finns ettor kan man lista ut en lösning. Ettan i $M[n, B]$ måste ha satts dit på grund av att det finns en etta i antingen $M[n - 1, B - a_n]$ eller $M[n - 1, B - b_n]$. Kom ihåg vilken av dessa det är. Om det står en etta i båda positionerna är det bara att välja en av dom (eftersom bara en enda lösning efterfrågas). Fortsätt på samma sätt från den valda positionen ända tills rad 1 har nåtts. Implementationen i C ser ut på följande sätt.

```
void WriteC(int n, int a[], int b[], int B)
{ int c[n + 1], pos;

  /* samma satser som i proceduren ExistsC ovan ska in här*/

  pos = B;
  for (i = n; i > 1; i++) {
    if (pos - a[i] > 0 && M[i - 1][pos - a[i]]) c[i] = a[i];
    else c[i] = b[i];
    pos -= c[i];
  }
  c[1] = pos;
  printf("Lösningen är %d", c[1]);
  for (i = 2; i <= n; i++) printf(" + %d", c[i]);
}
```

□

Lösning till Proteinvikning

Låt $q_{a,b}$ vara det maximala värdet på målfunktionen man kan få för en vikning av delen $p[a..n]$ av proteinet, där den första sträckan i vikningen har ändpunkterna a och b . Vi kan uttrycka $q_{a,b}$ rekursivt på följande sätt:

$$q_{a,b} = \max_{b+1 < c \leq n} (\text{profit}(a, b, c) + q_{b+1, c}).$$

Basfallen är $q_{a,n} = 0$ för $1 \leq a < n$. Svaret hittar vi sedan som $\max_{1 < b \leq n} q_{1,b}$.

Nu gäller det bara att beräkna $q_{a,b}$ enligt dessa formler i rätt ordning:

```

for a←1 to n-1 do q[a,n]←0;
for b←n-1 downto 2 do
  for a←1 to b-1 do
    t←-1;
    for c←b+2 to n do
      v←profit(a,b,c)+q[b+1,c];
      if v>t then t←v;
    q[a,b]←t;
max←0;
for b←2 to n do
  if q[1,b]>max then max←q[1,b];
return max;

```

Eftersom vi som mest har tre nästlade `for`-slingor och ett anrop till `profit` tar tid $O(n)$ blir tidskomplexiteten uppenbarligen $O(n^4)$. $\square$

Lösning till Analysator för kontextfri grammatik

Vi använder dynamisk programmering ungefär som i problemet där man letar efter optimal matris-kedjemultiplikationsordning. Här ska vi istället bestämma i vilken ordning och på vilken delsträng reglerna ska tillämpas.

Indata är en uppsättning regler R och en vektor $w[1..n]$ som alltså indexeras från 1 till n . Låt oss bygga upp en matris $M[1..n, 1..n]$ där elementet $M[i, j]$ anger dom ickeslutsymboler från vilka man med hjälp av kedjor av omskrivningar kan härleda delsträngen $w[i..j]$.

Rekursiv definition av $M[i, j]$:

$$M[i, j] = \begin{cases} \{X : (X \rightarrow w[i]) \in R\} & \text{om } i = j \\ \{X : (X \rightarrow AB) \in R \wedge \exists k : A \in M[i, k-1] \wedge B \in M[k, j]\} & \text{om } i < j \end{cases}$$

Eftersom varje position i matrisen är en mängd av ickeslutsymboler så måste vi välja en lämplig datastruktur också för detta. Låt oss representera en mängd av ickeslutsymboler som en bitvektor som indexeras med ickeslutsymboler. 1 betyder att symbolen är med i mängden och 0 att den inte är med i mängden. Exempel: Om $M[i, j][B] = 1$ så är ickeslutsymbolen B med i mängden $M[i, j]$, vilket betyder att det finns en kedja av omskrivningsregler från B till delsträngen $w[i..j]$.

Algoritm som beräknar matrisen $M[i, j]$ och returnerar sant ifall strängen tillhör språket som genereras av grammatiken:

```

for i←1 to n do
  M[i,i]←0; /* alla bitar nollställs */
  för varje regel  $X \rightarrow w[i]$  do
    M[i,i][X]←1;
for len←2 to n do
  for i←1 to n-len+1 do
    j←i+len-1;
    M[i,j]←0;
    for k←i+1 to j do
      för varje regel  $X \rightarrow AB$  do
        if M[i,k-1][A]=1 and M[k,j][B]=1 then
          M[i,j][X]←1;
return M[1,n][S]=1;

```

Tid: $O(n^3m)$. Minne: $O(n^2m)$ (eftersom m är en övre gräns för antalet ickeslutsymboler). $\square$