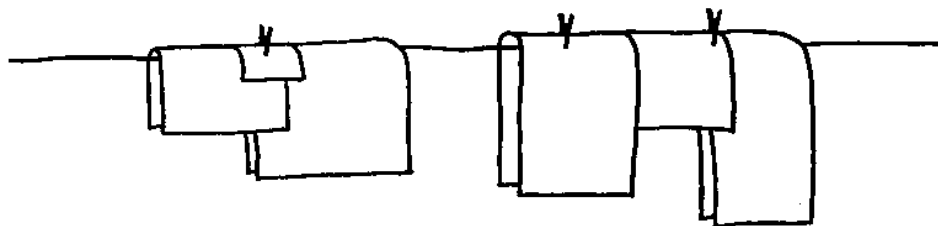


Övning 9. Repetition

Blandade uppgifter från tentor

1. (6p) På ett klädstreck har Viggo hängt n stycken handdukar av olika storlek. Viggo vill att handdukarna ska göra ett harmoniskt intryck för betraktaren. Därför var han mycket noga vid utplaceringen och har tagit mått på exakt var handdukarna hänger längs strecket, så att ingen ska flytta på dom. För att inte vinden ska störa ordningen vill Viggo säkra handdukarna med klädnypor, men han vill inte använda fler klädnypor än absolut nödvändigt. Det räcker ju att varje handduk kläms åt av en nypa, och två eller flera handdukar som hänger över varandra kan dela på samma nypa.



Beskriv en algoritm (i ord eller med pseudokod) som så snabbt som möjligt beräknar var på strecket man ska sätta nyporna för att det ska gå åt så få nypor som möjligt. Motivera att algoritmen är korrekt och analysera med enhetskostnad.

Indata är n stycken par av tal (v_1, h_1) , (v_2, h_2) , $\dots$, (v_n, h_n) där varje par talar om var vänsterkanten respektive högerkanten på en handduk är. Alla mått avser avståndet från början av klädstrecket till en handdukskant. Paren är inte sorterade på något sätt. Utdata ska vara ett antal tal som anger var man bör sätta klädnyporna (en klädnypa antas ha bredd 0).

För att du ska få maximal poäng måste din algoritm gå i tid $O(n \log n)$.

2. I en stor organisation som Teknis finns det många grupper av personer, t ex lärare på Nada, lärare på F, elever på kursen Algoritmer, datastrukturer och komplexitet, medlemmar i Teknologkören, etc. Varje individ är med i minst en grupp, men kan vara med i många grupper. Nu vill rektor skapa en grupp av informatörer som snabbt ska kunna föra ut information till alla individer på Teknis. Han vill att varje grupp ska vara representerad i informatörsgruppen (dvs minst en medlem i varje grupp ska vara med i informatörsgruppen), men han vill samtidigt att informatörsgruppen ska vara så liten som möjligt.

Detta är ett exempel på ett allmänt problem där man givet en uppsättning grupper vill hitta en så liten skara av representanter som möjligt.

- a) (1p) Formulera problemet matematiskt som ett mängdproblem och beskriv det samtidigt som ett beslutsproblem.
 - b) (5p) Visa att problemet är NP-fullständigt.
3. (6p) Indata till optimeringsproblemet MAX k -CUT är en graf G . En lösning är en uppdelning av hörnen i G i k grupper. Problemet är att hitta en lösning som maximerar antalet kanter i skärningen mellan grupperna, det vill säga som går mellan hörn som tillhör olika grupper. För $k = 2$ blir problemet alltså samma som MAX CUT.

Beskriv en probabilistisk approximationsalgoritm för MAX k -CUT och analysera väntevärdet för målfunktionen (det vill säga antalet kanter som går mellan hörn som tillhör olika grupper). Försök uppnå en algoritm där väntevärdet är minst $1 - 1/k$ av alla kanter, vilket innebär att approximationskvoten är $k/(k - 1)$.

4. Tumstocksproblemet kan beskrivas på följande sätt. En tumstock består av en kedja av träbitar som är fastsatta med gångjärn i ändarna. Det är möjligt (men inte nödvändigt) att vika tumstocken vid varje gångjärn. Det kan vara så att träbitarna som tumstocken är gjord av har olika längd. Då är det inte längre självklart hur man ska vika ihop tumstocken så att den blir så kort som möjligt (och går ner i snickarens ficka). Problemet är alltså att, givet en tumstock, vika ihop den så att den blir så kort som möjligt.
 - a) (1p) Formulera tumstocksproblemet matematiskt som ett beslutsproblem.
 - b) (10p) Visa att tumstocksproblemet är NP-fullständigt. Reducera till exempel mängdpartitioneringsproblemet till tumstocksproblemet.
 - c) (10p) Anta att träbitarna har heltalslängder och att den längsta träbiten är $17n$, där n är antalet träbitar som tumstocken är sammansatt av. Bestäm komplexiteten för detta problem.
5. a) (6p) MAX 2 $\wedge$ SAT är ett optimeringsproblem som definieras som beslutsproblem på följande sätt.

INMATNING: Ett positivt heltal K mellan 1 och n samt n klausuler där varje klausul består av en enda literal eller två literaler kombinerade av operatoren $\wedge$. Exempel: $x_1 \wedge \bar{x}_3$, $x_2 \wedge x_3$.

PROBLEM: Finns det en variabeltilldelning som satisfierar minst K klausuler?

Visa att denna beslutsproblemsversion av MAX 2 $\wedge$ SAT är NP-fullständig. Du kan exempelvis använda dej av att MAX 2SAT – det motsvarande problemet med operatoren $\vee$ istället för $\wedge$ – är NP-fullständigt.

 - b) (5p) Konstruera en probabilistisk approximationsalgoritm som approximerar optimeringsproblemet MAX 2 $\wedge$ SAT inom faktorn 4 (i medeltal).