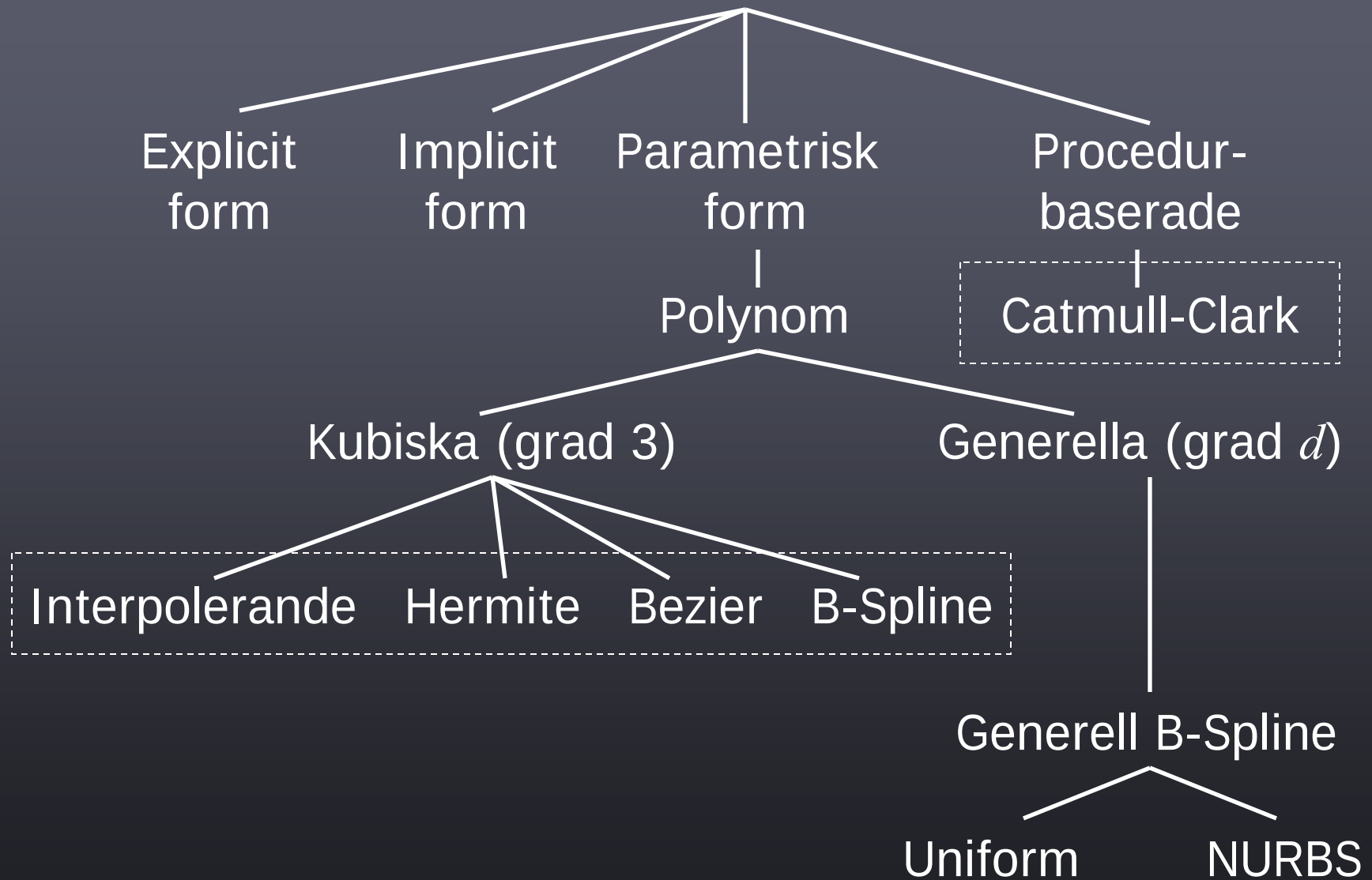




Kurvor och ytor

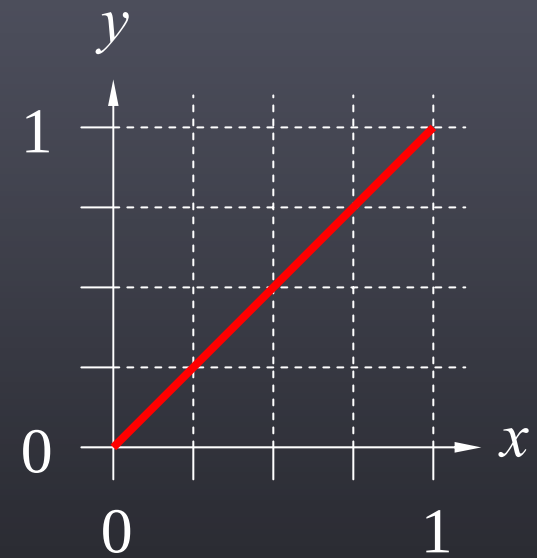
Gustav Taxén
gustavt@csc.kth.se

Kurvor och ytor



Representation av kurvor

	Generellt	Exempel
Explicit	$y = f(x)$	$y = x$
Implicit	$f(x, y) = 0$	$x - y = 0$
Para- metrisk	$x = f_x(u)$ $y = f_y(u)$ $u_{min} \leq u \leq u_{max}$	$x = u$ $y = u$ $0 \leq u \leq 1$



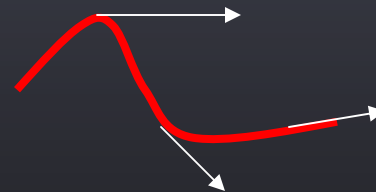
Parametriska kurvor

Om vi deriverar uttrycket för kurvan

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \end{bmatrix}$$

får vi en vektor som definierar kurvans tangent:

$$\frac{d\mathbf{p}(u)}{du} = \begin{bmatrix} \frac{df_x(u)}{du} \\ \frac{df_y(u)}{du} \end{bmatrix}$$

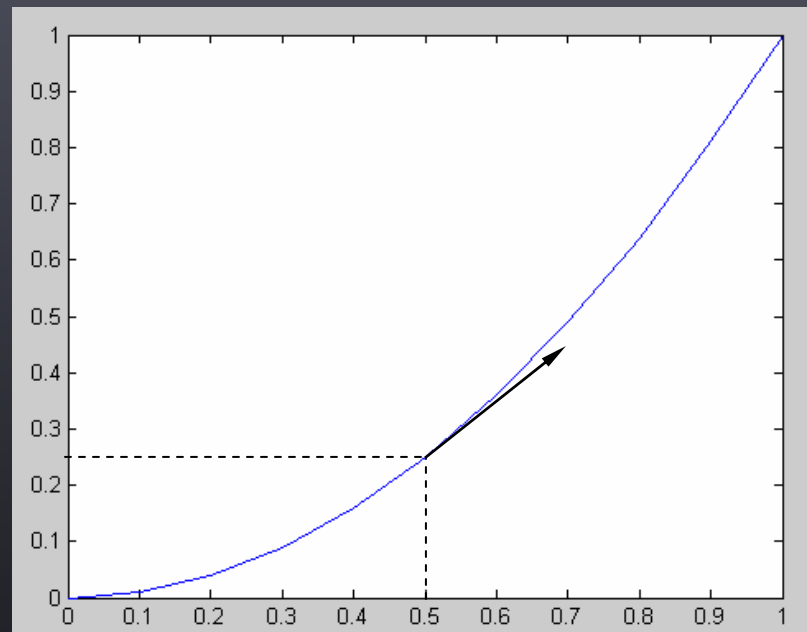
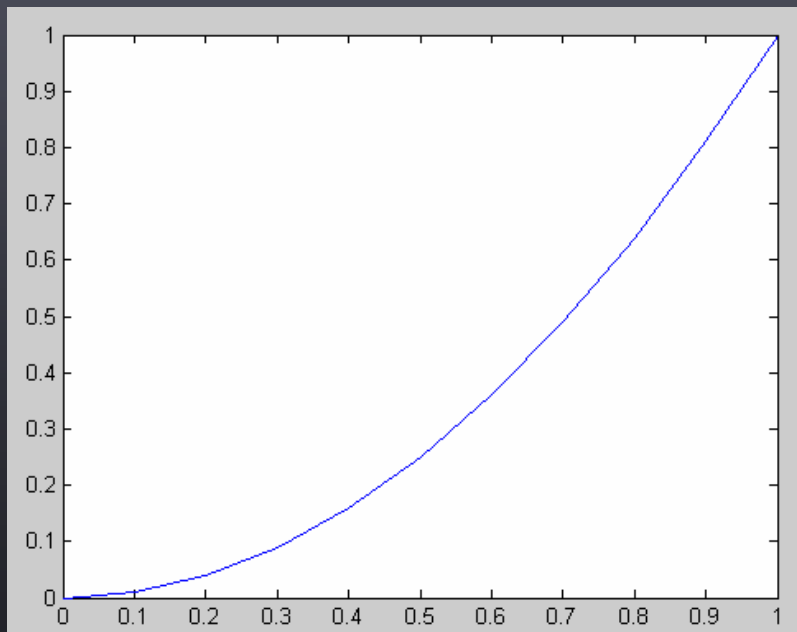


Exempel

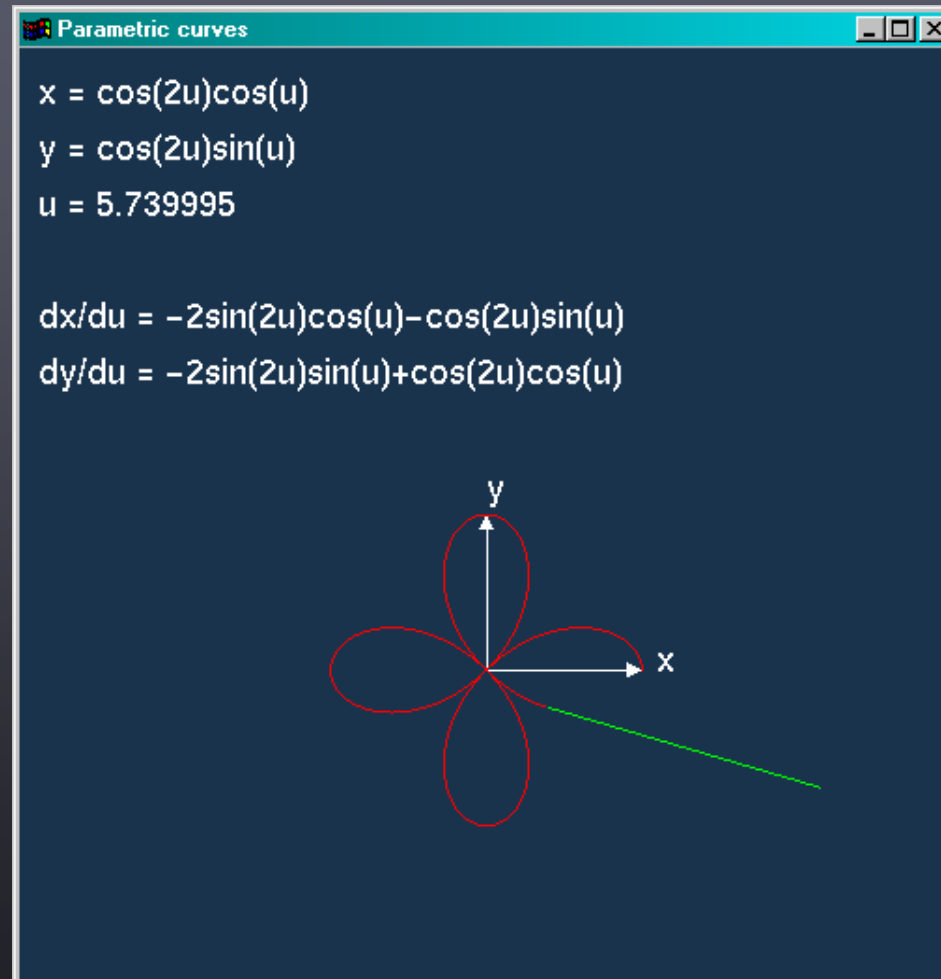
$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} u \\ u^2 \end{bmatrix}$$
$$0 \leq u \leq 1$$

$$\frac{d\mathbf{p}(u)}{du} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2u \end{bmatrix}$$

I $u = 0.5$ får vi tangenten $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



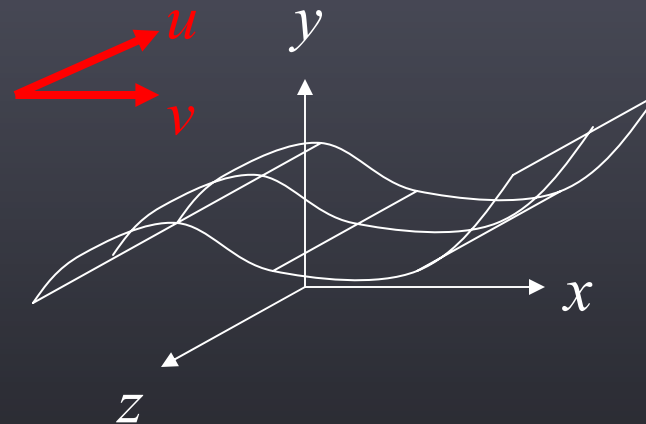
Exempel



Parametriska ytor

För ytor krävs två parametrar:

$$\mathbf{p}(u,v) = \begin{pmatrix} f_x(u,v) \\ f_y(u,v) \\ f_z(u,v) \end{pmatrix}$$



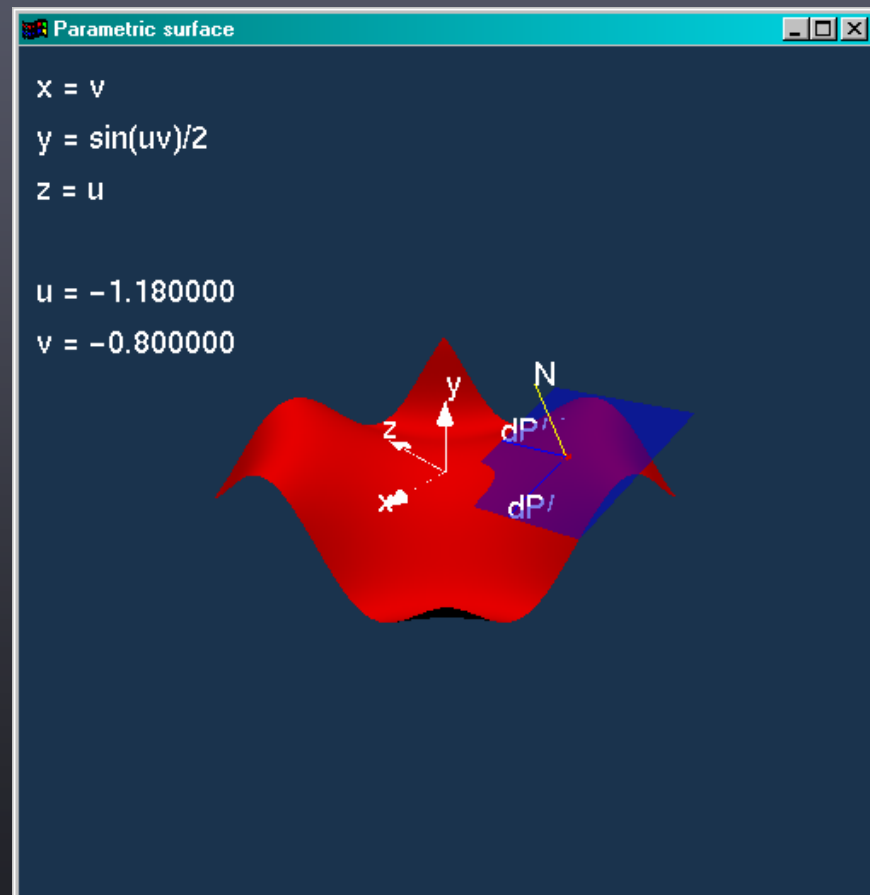
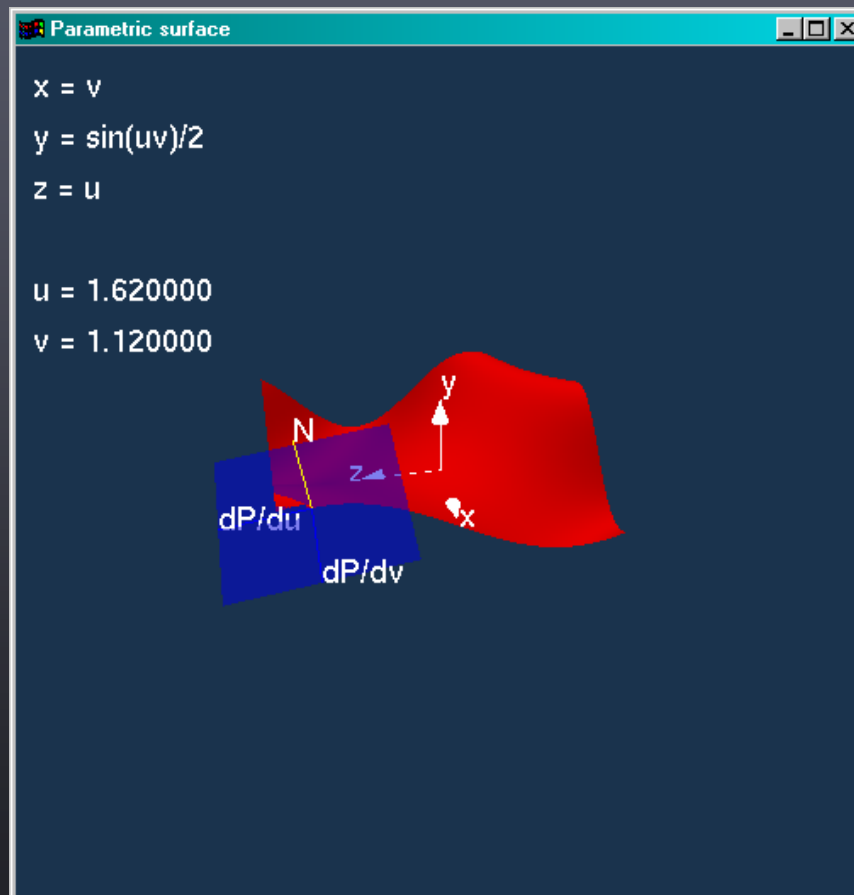
Parametriska ytor

De vektorer vi får om vi deriverar m.a.p. u och v definierar ytans **tangentplan**:

$$\frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_y(u,v)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_z(u,v)}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_y(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_z(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(u,v)}{\partial v} \quad \text{är ytans } \mathbf{normal}.$$

Exempel



Parametriska polynomkurvor

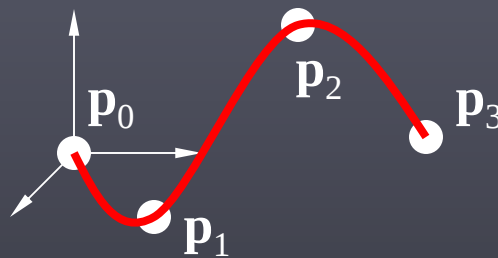
Då $\mathbf{p}(u)$ är ett polynom i u kallas kurvan **polynomkurva**.

$$\mathbf{p}(u) = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \\ f_z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + \dots + u^nc_{xn} \\ c_{y0} + uc_{y1} + u^2c_{y2} + \dots + u^nc_{yn} \\ c_{z0} + uc_{z1} + u^2c_{z2} + \dots + u^nc_{zn} \end{pmatrix}$$
$$0 \leq u \leq 1$$

Polynomkurvor, visar det sig, har egenskaper som är intressanta för datorgrafik och CAD/CAM.

Interpolerande polynomkurvor

Antag att vi har fyra **styrpunkter** $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ och $\mathbf{p}_3$ och att vi vill att kurvan ska gå genom dessa punkter.



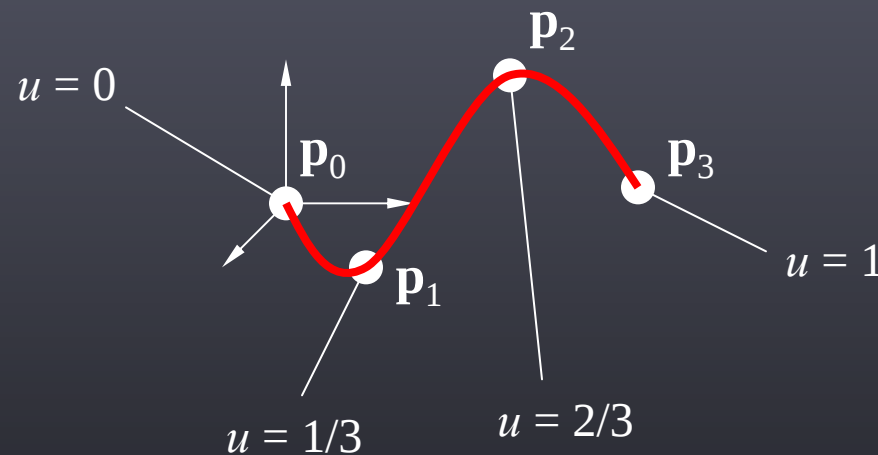
$$\mathbf{p}_0 = (p_{0x} \ p_{0y} \ p_{0z})^T, \mathbf{p}_1 = (p_{1x} \ p_{1y} \ p_{1z})^T, \mathbf{p}_2 = (p_{2x} \ p_{2y} \ p_{2z})^T, \mathbf{p}_3 = (p_{3x} \ p_{3y} \ p_{3z})^T$$

Vi samlar koordinaterna i tre vektorer:

$$\mathbf{p}_x = \begin{pmatrix} p_{0x} \\ p_{1x} \\ p_{2x} \\ p_{3x} \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_y = \begin{pmatrix} p_{0y} \\ p_{1y} \\ p_{2y} \\ p_{3y} \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_z = \begin{pmatrix} p_{0z} \\ p_{1z} \\ p_{2z} \\ p_{3z} \end{pmatrix}$$

Interpolanderande polynomkurvor

Vi bestämmer att kurvan ska gå genom styrpunkterna vid $u = 0, u = 1/3, u = 2/3$ och $u = 1$.



Vilka polynomkoefficienter ska vi ha?

Interpolerande polynomkurvor

Låt oss börja med x -komponenten. Vi hade att

$$f_x(u) = c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3}$$

och vi vill ha

$$f_x(0) = p_{0x} \quad f_x(1/3) = p_{1x} \quad f_x(2/3) = p_{2x} \quad f_x(1) = p_{3x}$$

$u = 0:$	$p_{0x} = c_{x0}$
$u = 1:$	$p_{3x} = c_{x0} + c_{x1} + c_{x2} + c_{x3}$
$u = 1/3:$	$p_{1x} = c_{x0} + (1/3)c_{x1} + (1/3)^2c_{x2} + (1/3)^3c_{x3}$
$u = 2/3:$	$p_{2x} = c_{x0} + (2/3)c_{x1} + (2/3)^2c_{x2} + (2/3)^3c_{x3}$

Interpolerande polynomkurvor

Löser man ekvationssystemet får man

$$c_{0x} = p_{0x}$$

$$c_{1x} = -5.5p_{0x} + 9p_{1x} - 4.5p_{2x} + p_{3x}$$

$$c_{2x} = 9p_{0x} - 22.5p_{1x} + 18p_{2x} - 4.5p_{3x}$$

$$c_{3x} = -4.5p_{0x} + 13.5p_{1x} - 13.5p_{2x} + 4.5p_{3x}$$

y - och z -komponenterna får samma värden.

Kurvan som har dessa c -koefficienter sägs
interpolera de fyra styrpunkterna.

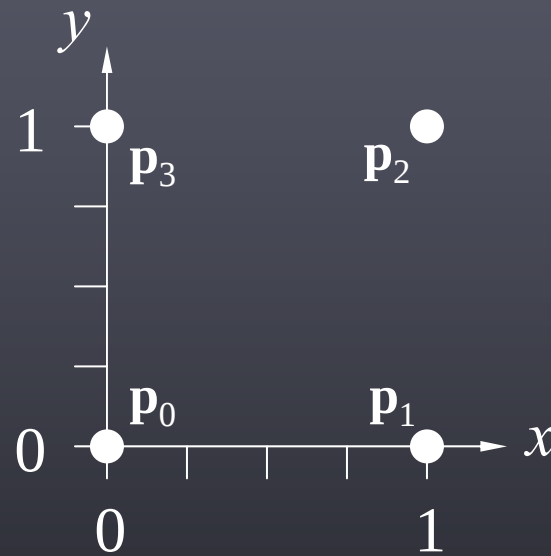
Exempel

$$\mathbf{p}_0 = (0 \ 0)^T$$

$$\mathbf{p}_1 = (1 \ 0)^T$$

$$\mathbf{p}_2 = (1 \ 1)^T$$

$$\mathbf{p}_3 = (0 \ 1)^T$$



Exempel

$$f_x(u) = c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3}$$

$$\mathbf{p}_0 = (0 \ 0)^T \quad \mathbf{p}_1 = (1 \ 0)^T \quad \mathbf{p}_2 = (1 \ 1)^T \quad \mathbf{p}_3 = (0 \ 1)^T$$

$$c_{0x} = p_{0x}$$

$$c_{1x} = -5.5p_{0x} + 9p_{1x} - 4.5p_{2x} + p_{3x}$$

$$c_{2x} = 9p_{0x} - 22.5p_{1x} + 18p_{2x} - 4.5p_{3x}$$

$$c_{3x} = -4.5p_{0x} + 13.5p_{1x} - 13.5p_{2x} + 4.5p_{3x}$$



$$c_{0x} = 0$$

$$c_{1x} = -5.5 \cdot 0 + 9 \cdot 1 - 4.5 \cdot 1 + 0 = 4.5$$

$$c_{2x} = 9 \cdot 0 - 22.5 \cdot 1 + 18 \cdot 1 - 4.5 \cdot 0 = -4.5$$

$$c_{3x} = -4.5 \cdot 0 + 13.5 \cdot 1 - 13.5 \cdot 1 + 4.5 \cdot 0 = 0$$

Exempel

$$f_y(u) = c_{y0} + uc_{y1} + u^2c_{y2} + u^3c_{y3}$$

$$\mathbf{p}_0 = (0 \ 0)^T \quad \mathbf{p}_1 = (1 \ 0)^T \quad \mathbf{p}_2 = (1 \ 1)^T \quad \mathbf{p}_3 = (0 \ 1)^T$$

$$c_{0y} = p_{0y}$$

$$c_{1y} = -5.5p_{0y} + 9p_{1y} - 4.5p_{2y} + p_{3y}$$

$$c_{2y} = 9p_{0y} - 22.5p_{1y} + 18p_{2y} - 4.5p_{3y}$$

$$c_{3y} = -4.5p_{0y} + 13.5p_{1y} - 13.5p_{2y} + 4.5p_{3y}$$



$$c_{0y} = 0$$

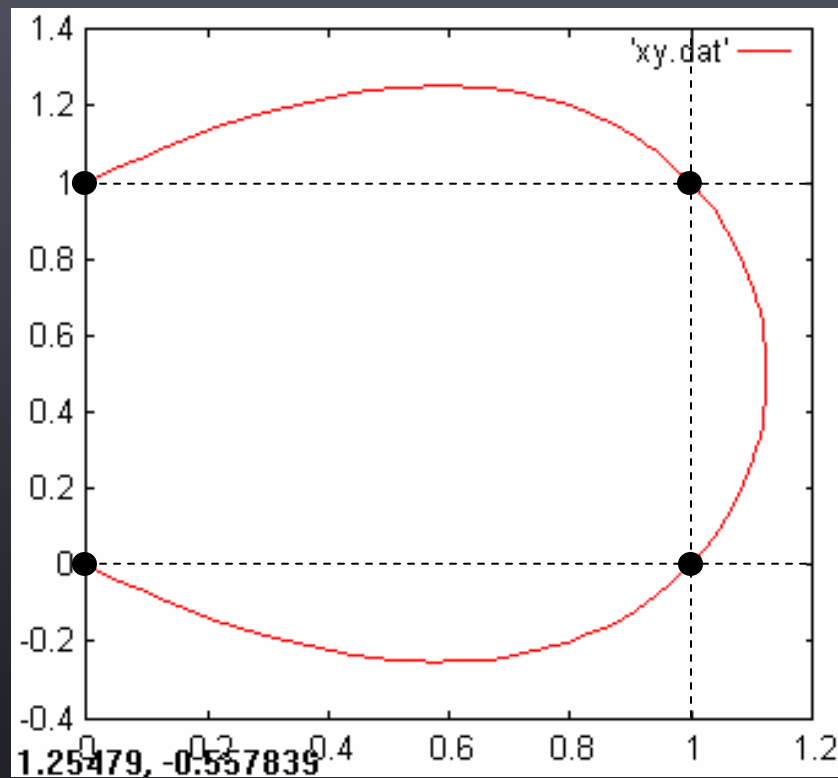
$$c_{1y} = -5.5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 - 4.5 \cdot 1 + 1 = -3.5$$

$$c_{2y} = 9 \cdot 0 - 22.5 \cdot 0 + 18 \cdot 1 - 4.5 \cdot 1 = 13.5$$

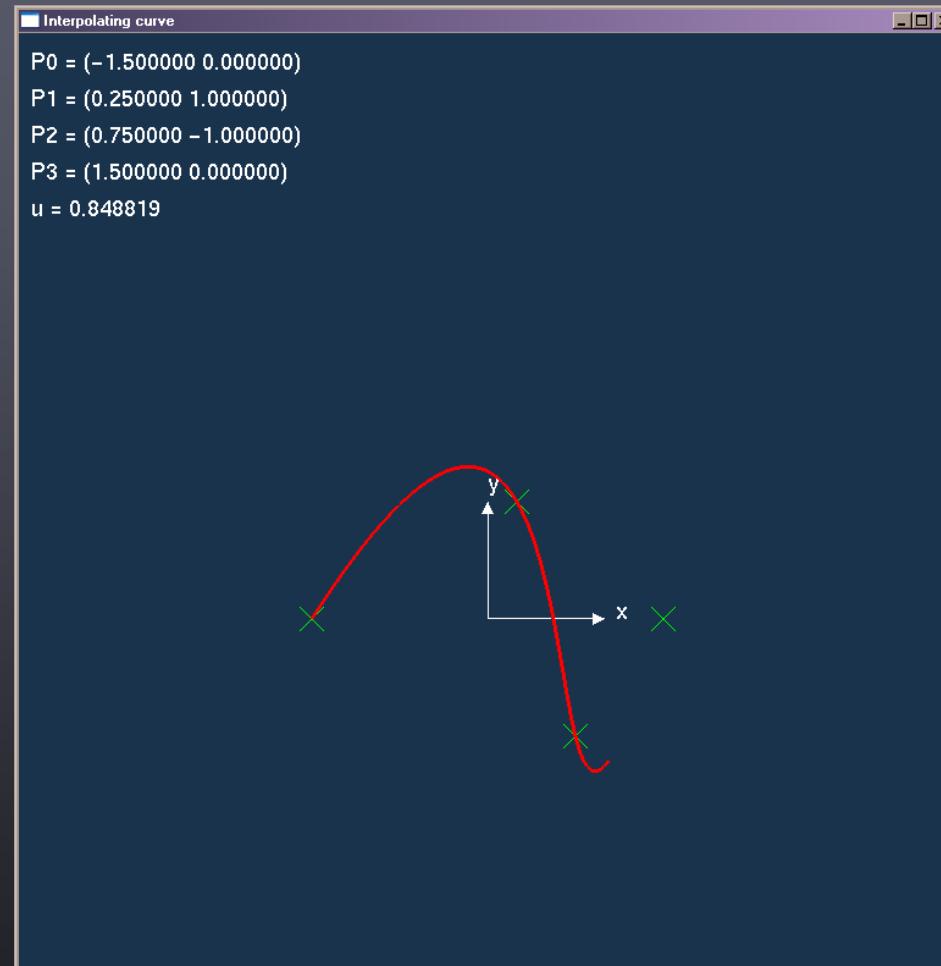
$$c_{3y} = -4.5 \cdot 0 + 13.5 \cdot 0 - 13.5 \cdot 1 + 4.5 \cdot 1 = -9$$

Exempel

$$\begin{cases} f_x(u) = 0 + 4.5u - 4.5u^2 + 0 \cdot u^3 \\ f_y(u) = 0 - 3.5u + 13.5u^2 - 9u^3 \end{cases}$$



Exempel



Blandningspolynom

Funktion $\mathbf{b}(u)$ som visar hur varje styrpunkt bidrar till kurvan när u sveps från 0 till 1.

Exempel: En kurva som interpolerar två styrpunkter:

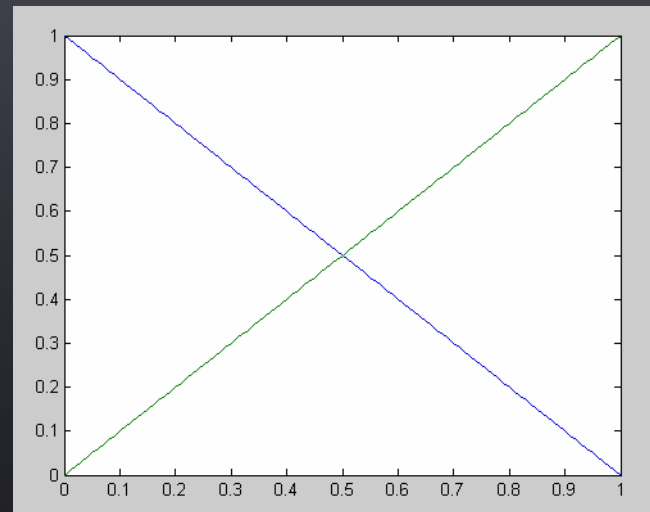
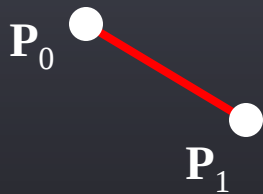
$$f_x(u) = (1 - u)p_{0x} + up_{1x}$$

$$f_y(u) = (1 - u)p_{0y} + up_{1y}$$

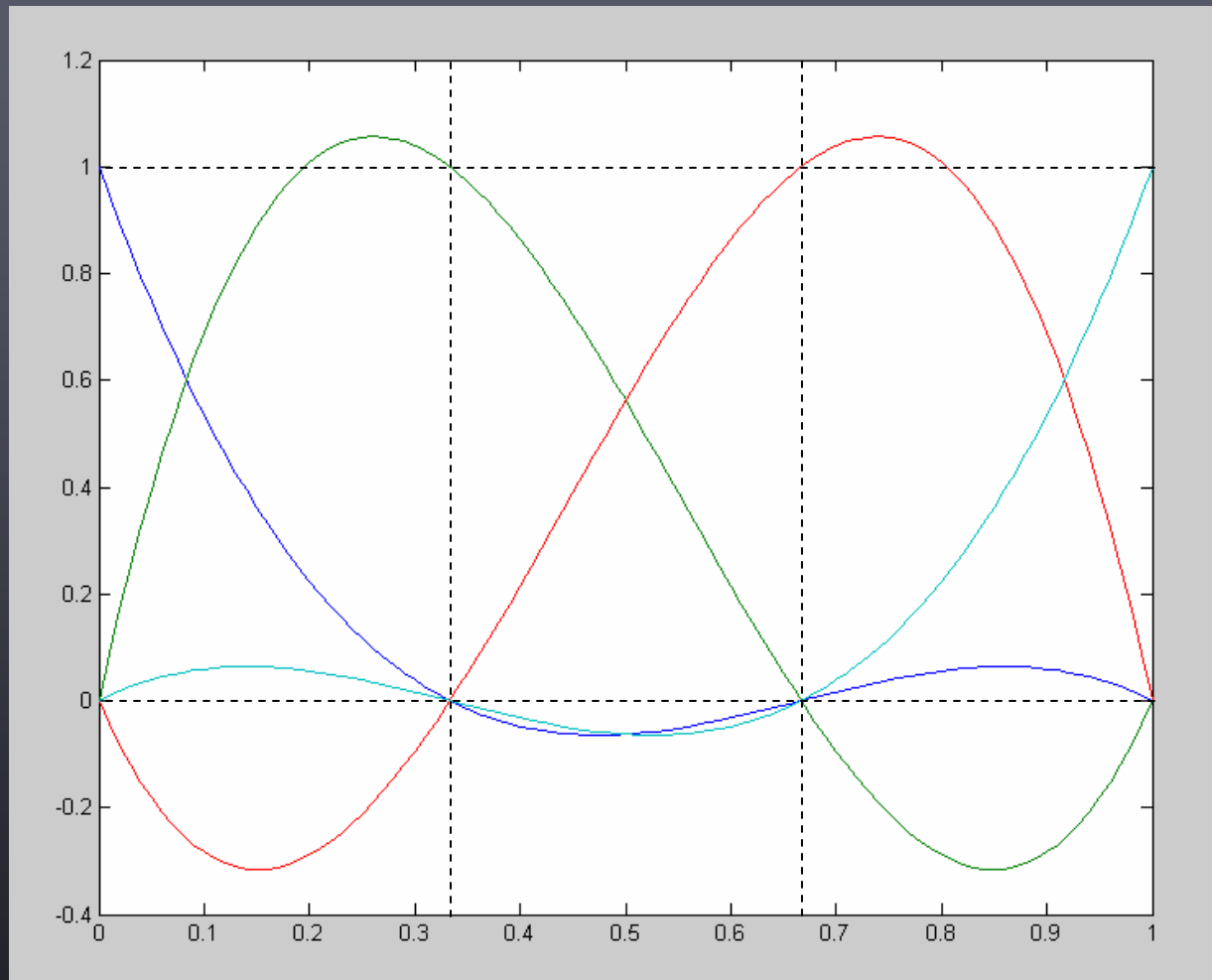


$$b_0(u) = 1 - u$$

$$b_1(u) = u$$



Blandningspolynom



Blandningspolynom för en interpolerande kurva.

En **parametrisk kubisk polynomkurva**
är en kurva på formen

$$\mathbf{p}(u) = b_0(u)\mathbf{p}_0 + b_1(u)\mathbf{p}_1 + b_2(u)\mathbf{p}_2 + b_3(u)\mathbf{p}_3$$

där

$\mathbf{p}_i$ är kurvans **styrpunkter** och
 $b_i(u)$ är kurvans **blandningspolynom**.

Utritning av parametriska kurvor

```
draw2DCurve(float px[4], float py[4], float step) {  
    float u;  
    float oldx, oldy;  
    for (u = 0.0f; u <= 1.0f; u += step) {  
        float c0x = px[0];  
        float c0y = py[0];  
        float c1x = -5.5 * px[0] +  
                    9 * px[1] - 4.5 * px[2] + px[3];  
        ...  
        float u2 = u * u;  
        float u3 = u * u2;  
        float x = c0x + c1x * u + c2x * u2 + c3x * u3;  
        float y = c0y + c1y * u + c2y * u2 + c3y * u3;  
        drawLine(oldx, oldy, x, y);  
        oldx = x; oldy = y;  
    }  
}
```

(Egentligen måste man initiera **oldx** och **oldy** också.)

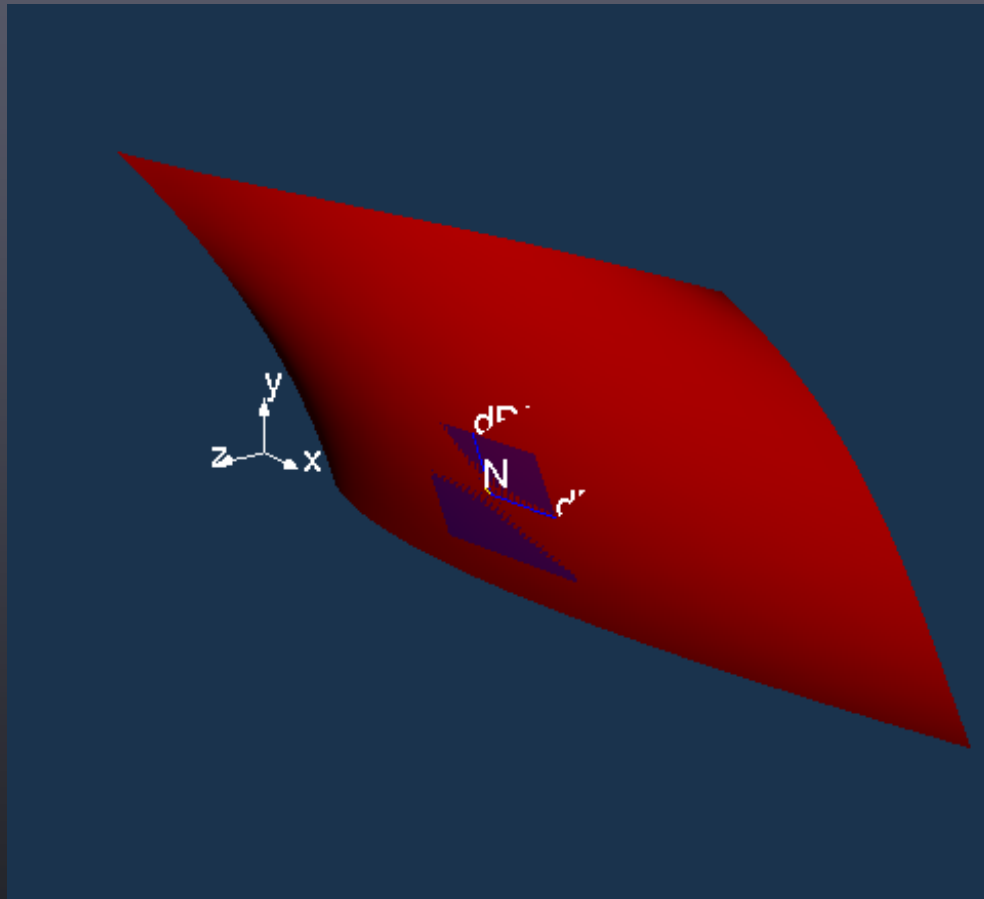
Kubiska polynomiytor

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} f_x(u, v) \\ f_y(u, v) \\ f_z(u, v) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \begin{bmatrix} c_{xij} \\ c_{yij} \\ c_{zij} \end{bmatrix} u^i v^j$$

$$0 \leq u \leq 1$$

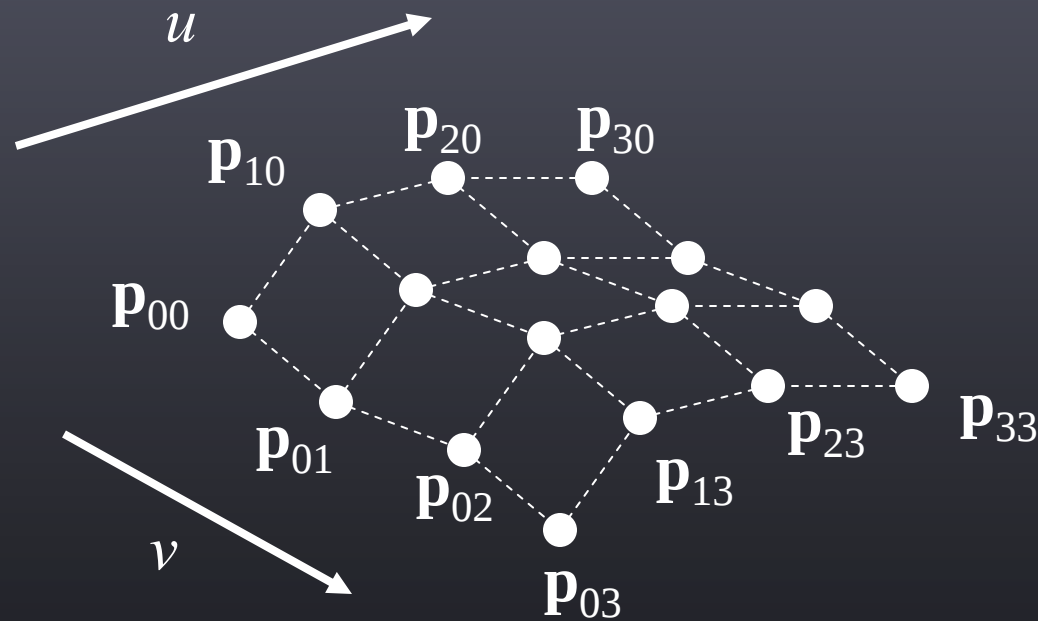
$$0 \leq v \leq 1$$

Exempel



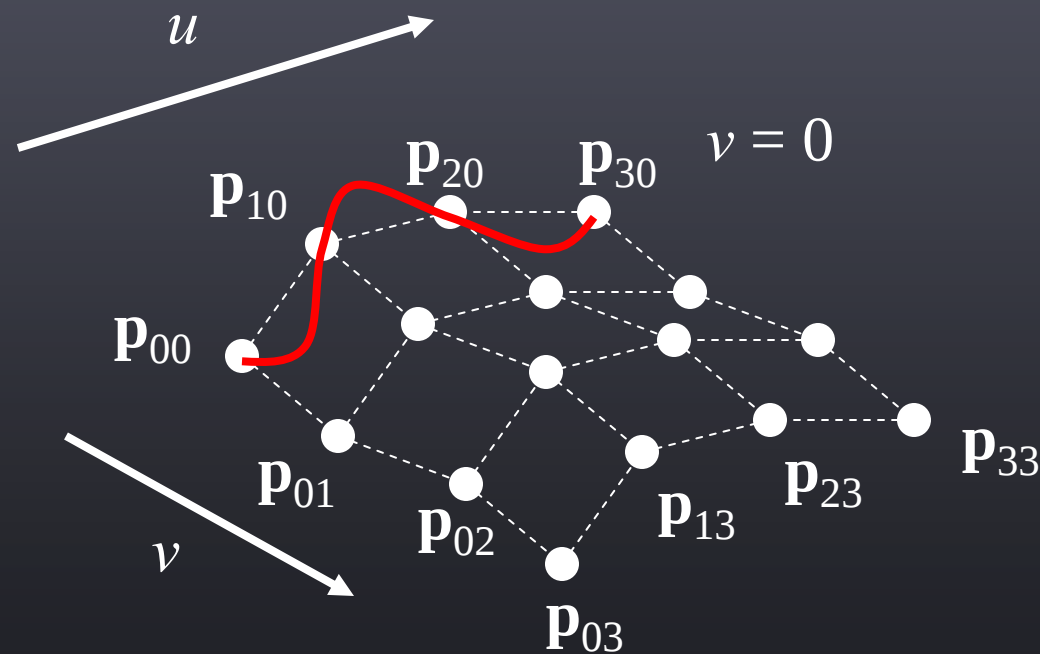
Interpolierende polynomytor

Kräver 16 stympunkter:



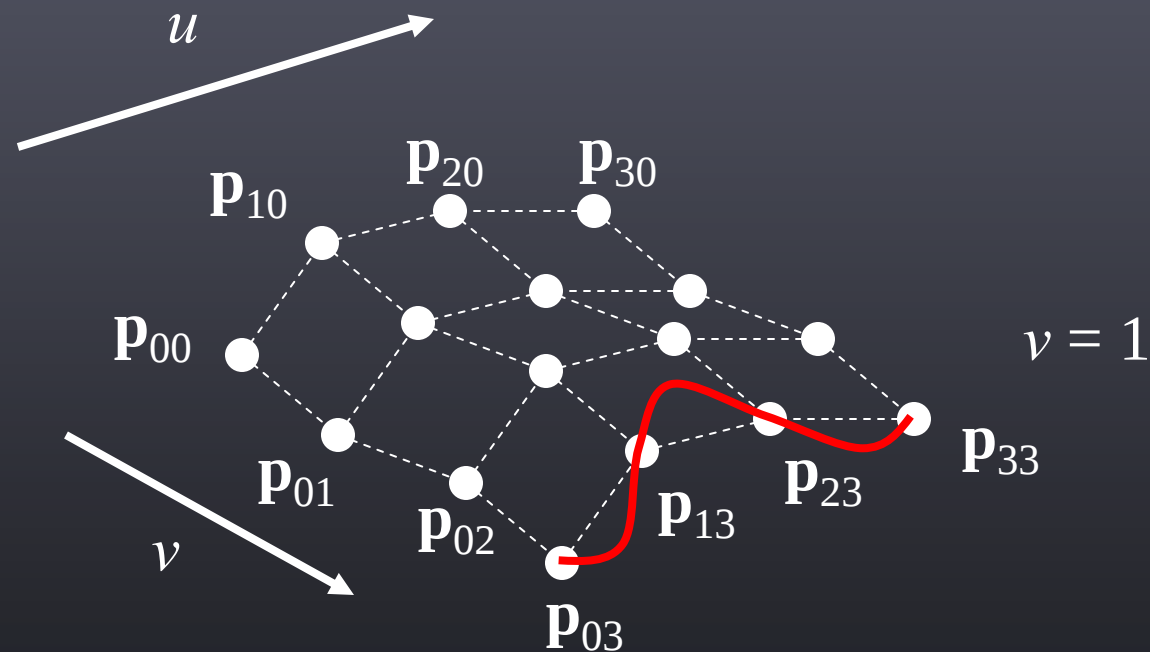
Interpolanderande polynomytor

Om vi sätter $v = 0$ får vi en kurva som ska interpolera punkterna p_{00} , p_{10} , p_{20} och p_{30} .



Interpolanderande polynomytor

Sätter vi $v = 1$ får vi en kurva som måste interpolera punkterna p_{03} , p_{13} , p_{23} och p_{33} .

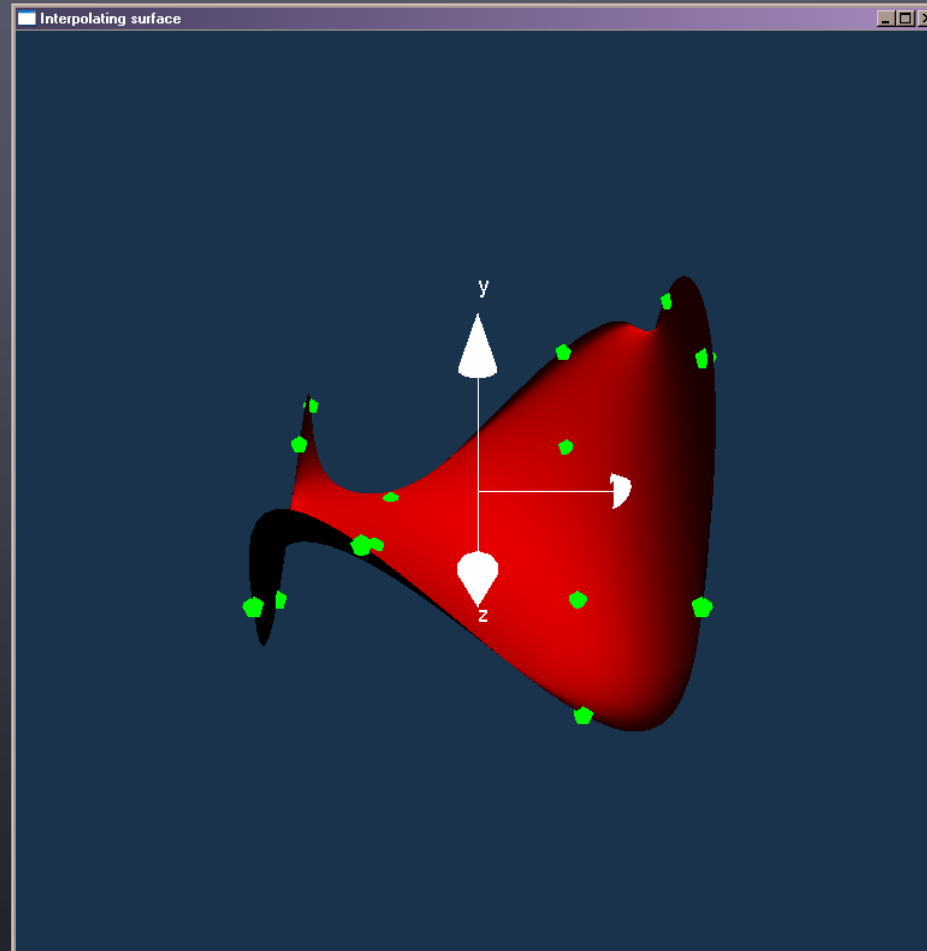


Interpolerande polynomytor

Lägger man till $v = 1/3$ och $v = 2/3$ får man ett linjärt ekvationssystem.

När man löser detta (se boken) får man Koefficienterna för polynomen.

Interpolerande polynomtor



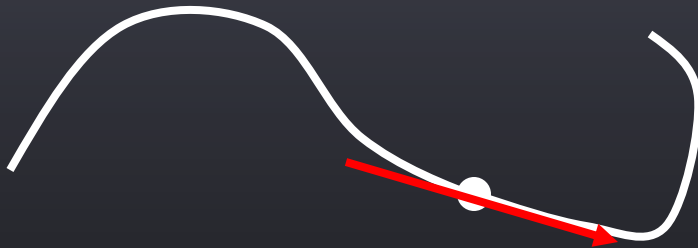
Sammanlänkning av kurvor



Icke-kontinuerlig



C^0 -kontinuerlig



C^1 -kontinuerlig

Hermitekurvor

Fås om man kräver C^1 -kontinuitet.
Kurvans ekvation är (i 2D)

$$\begin{aligned}f_x(u) &= c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3} \\f_y(u) &= c_{y0} + uc_{y1} + u^2c_{y2} + u^3c_{y3}\end{aligned}$$

Vi behåller första och sista styrpunkten:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= (p_{0x} \ p_{0y})^T \\ \mathbf{p}_3 &= (p_{3x} \ p_{3y})^T\end{aligned}$$

Hermitekurvor

Sedan väljer vi tangenten i $\mathbf{p}_0$ och $\mathbf{p}_3$ explicit, d.v.s.

$$\frac{df(u=0)}{du} = \begin{pmatrix} \left. \frac{df_x(u)}{du} \right|_{u=0} \\ \left. \frac{df_y(u)}{du} \right|_{u=0} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p'_{0x} \\ p'_{0y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{df(u=1)}{du} = \begin{pmatrix} \left. \frac{df_x(u)}{du} \right|_{u=1} \\ \left. \frac{df_y(u)}{du} \right|_{u=1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p'_{3x} \\ p'_{3y} \end{pmatrix}$$

Hermitekurvor

För x-komponenten är kurvans ekvation

$$f_x(u) = c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3}$$

och dess derivata är

$$f'_x(u) = c_{x1} + 2uc_{x2} + 3u^2c_{x3}$$

så

$$p_{0x} = f_x(0) = c_{x0}$$

$$p_{3x} = f_x(1) = c_{x0} + c_{x1} + c_{x2} + c_{x3}$$

$$p'_{0x} = f'_x(0) = c_{x1}$$

$$p'_{3x} = f'_x(1) = c_{x1} + 2c_{x2} + 3c_{x3}$$

Hermitekurvor

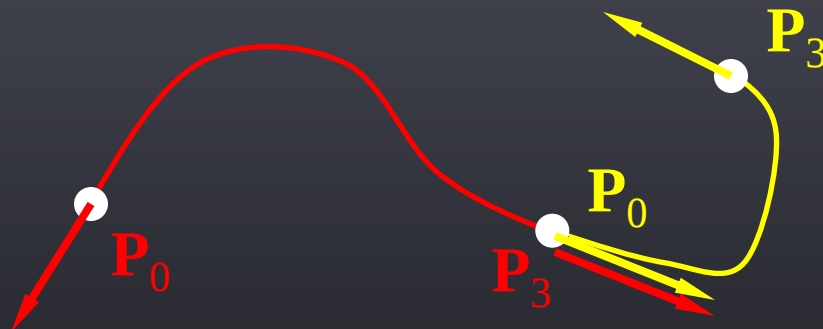
Löser vi ekvationssystemet får vi

$$f_x(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{0x} \\ p_{1x} \\ p'_{0x} \\ p'_{1x} \end{pmatrix}$$

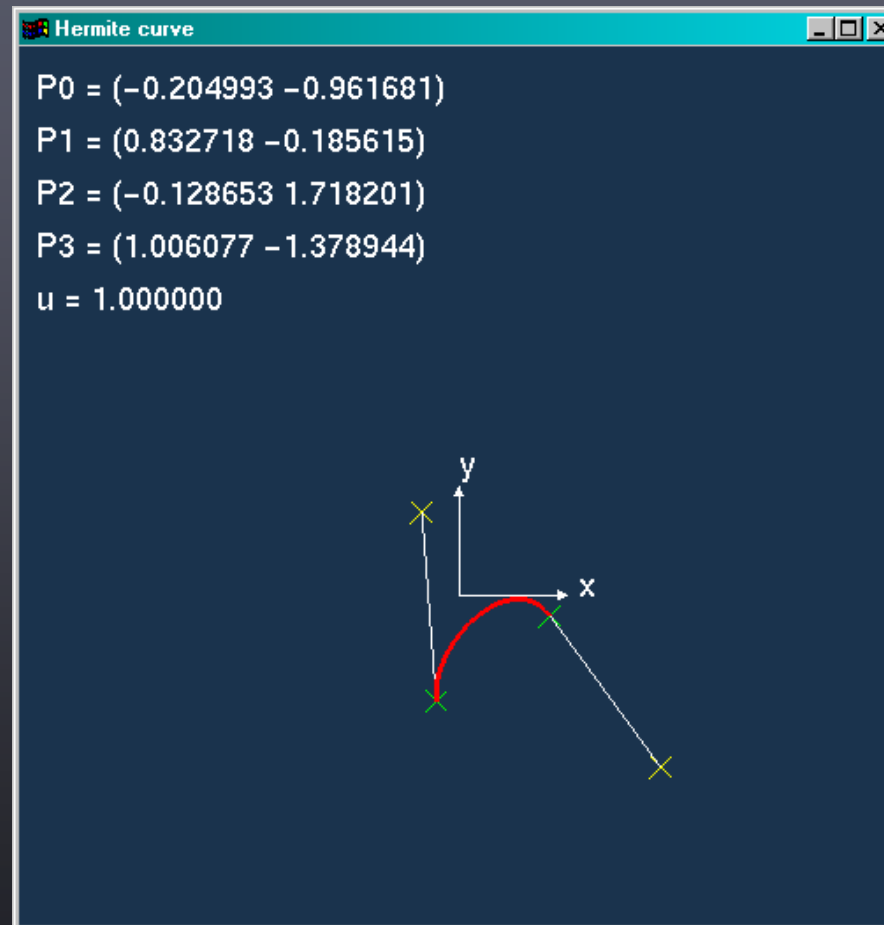
y - och z -komponenterna blir samma.

Sammanlänkning av kurvor

Vi kan få C^1 -kontinuitet genom att sätta samman två Hermitekurvor där tangenten är densamma i P_3 för första kurvan och P_0 för andra kurvan:

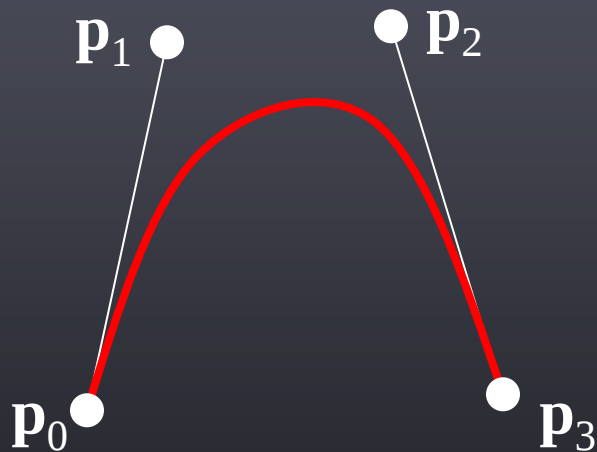


Exempel



Beziérkurvor

Samma som Hermite men specificeras lite annorlunda.
Derivatorna sätts till



$$\frac{d\mathbf{p}_0}{du} = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_3}{du} = 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

↑
För att kurvan ska ritas med
linjär hastighet m.a.p. u .
(Inte uppenbart, men kan visas.)

Beziérkurvor

$$f_x(u) = c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3}$$

$$f'_x(u) = c_{x1} + 2uc_{x2} + 3u^2c_{x3}$$

$$p_{0x} = c_{x0}$$

$$p_{1x} = c_{x0} + c_{x1} + c_{x2} + c_{x3}$$

$$3(p_{1x} - p_{0x}) = f'_x(0) = c_{x1}$$

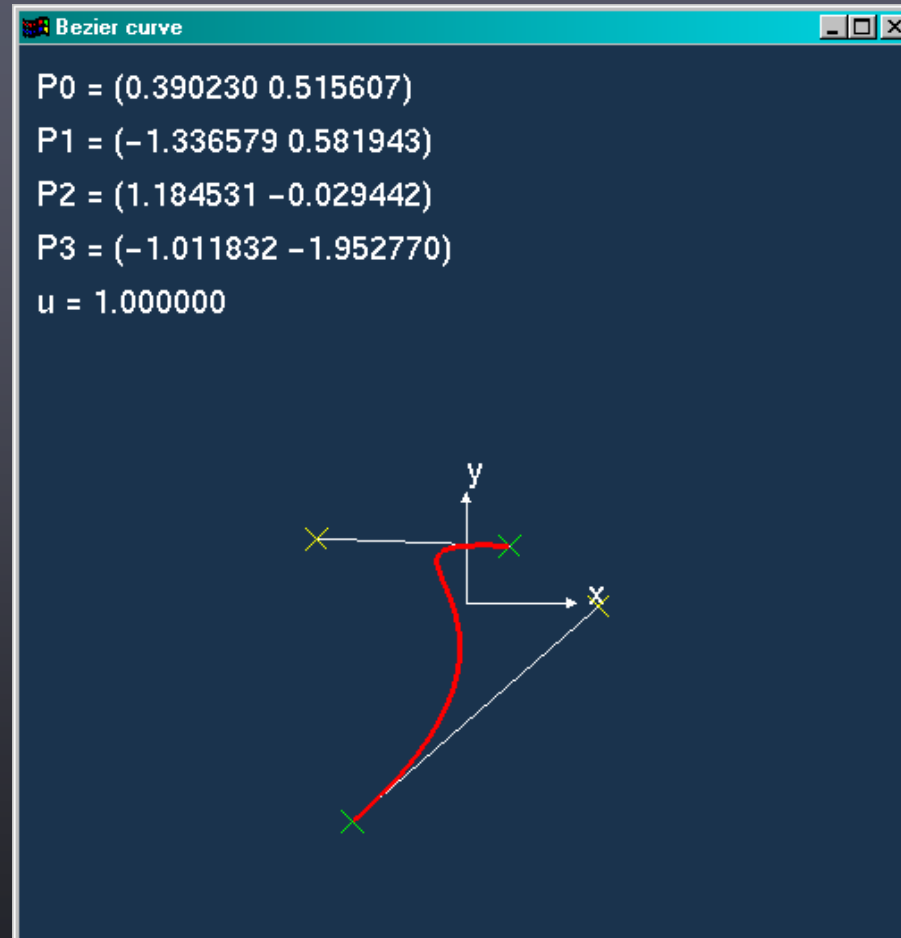
$$3(p_{3x} - p_{2x}) = f'_x(1) = c_{x1} + 2c_{x2} + 3c_{x3}$$

Beziérkurvor

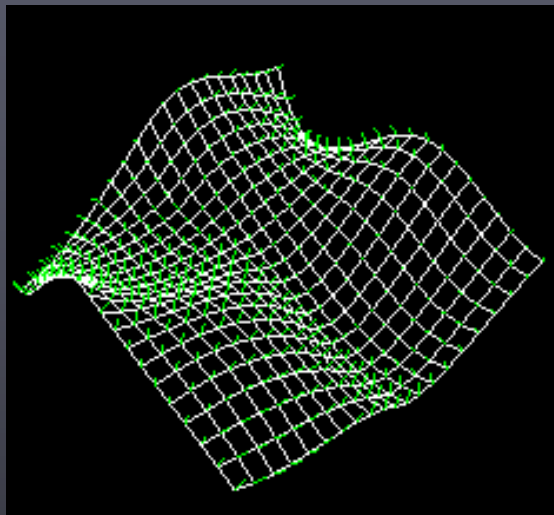
Lösningen blir

$$f_x(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{0x} \\ p_{1x} \\ p_{2x} \\ p_{3x} \end{pmatrix}$$

Beziérkurvor



Beziérytor

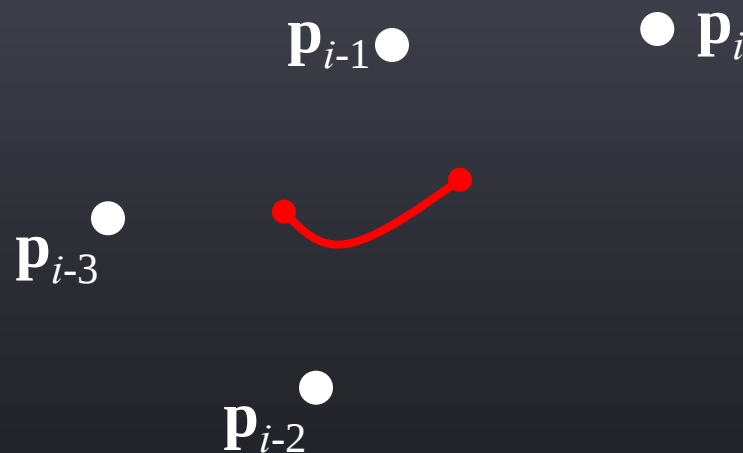


På motsvarande sätt som för interpolerande ytor
(se boken).

Kubiska B-splinekurvor

Nackdelen med Hermitekurvor är att C^1 -kontinuitet inte alltid räcker.

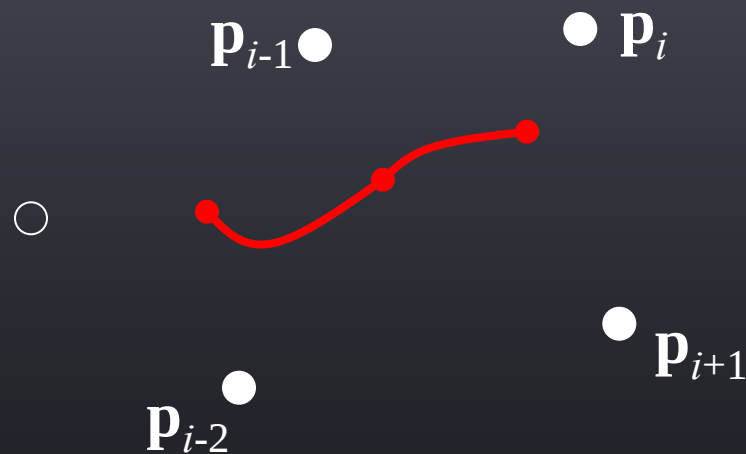
Det kan lösas genom att man släpper kravet att kurvan ska interpolera slutpunkterna på kurvan.



Kubiska B-splinekurvor

Nackdelen med Hermitekurvor är att C^1 -kontinuitet inte alltid räcker.

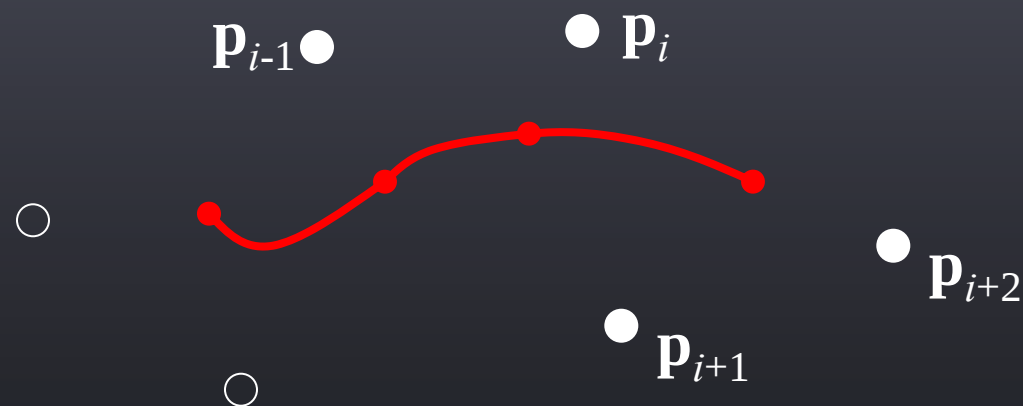
Det kan lösas genom att man släpper kravet att kurvan ska interpolera slutpunkterna på kurvan.



Kubiska B-splinekurvor

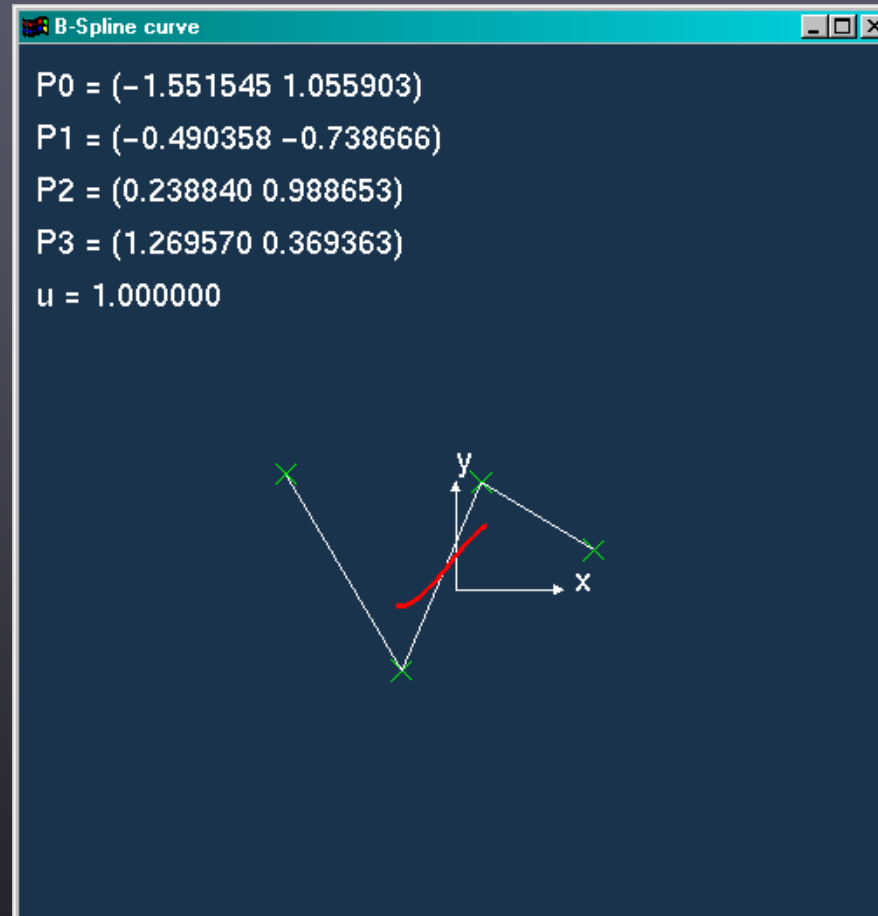
Nackdelen med Hermitekurvor är att C^1 -kontinuitet inte alltid räcker.

Det kan lösas genom att man släpper kravet att kurvan ska interpolera slutpunkterna på kurvan.



Se boken för härledning.

Exempel



Generaliserade B-splinekurvor

Vi kan generalisera B-splinekurvsbegreppet.

Vi kan konstruera en funktion

$$\mathbf{p}(u) = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \\ f_z(u) \end{pmatrix}$$

över intervallen

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n$$

Värdena $u_0, u_1, \dots, u_n$ kallas **knutar**.

Generaliserade B-splinekurvor

Den **generaliserade B-splinekurvas** ekvation är

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n B_{id}(u) \mathbf{p}_i$$

där $B_{id}(u)$ är en **basfunktion**,
i det här fallet ett polynom av grad d
(och $\mathbf{p}_i$ är styrpunkterna)

Väljer man $B_{i3}(u)$ som blandningspolynom för en
kubisk B-spline (se boken) och knutarna
 $\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$
får man en Beziérkurva.

NURBS

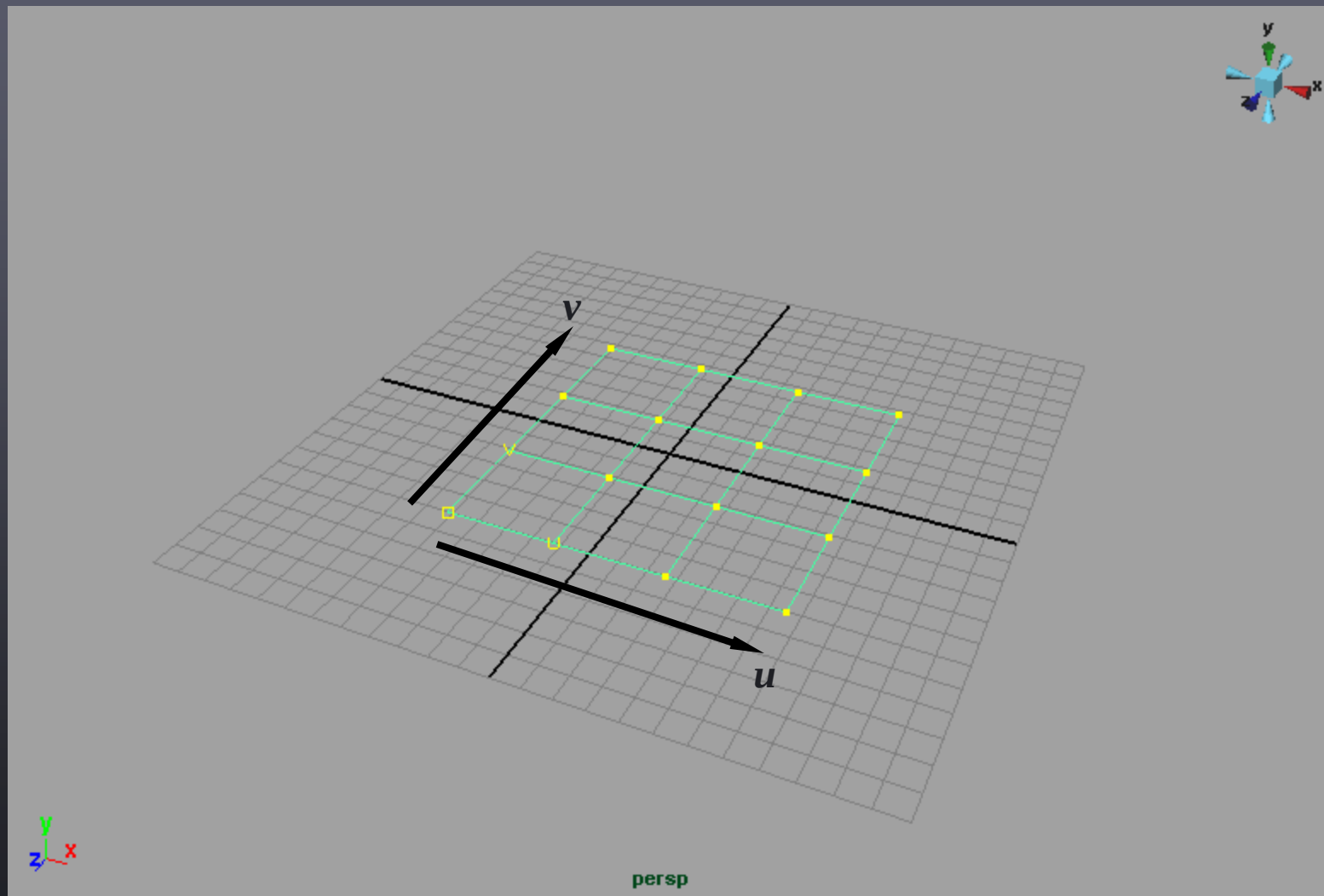
NURBS = Non-Uniform Rational B-Spline
Variant av generaliserad B-Spline där
man viktar de olika styrapunkterna.

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0} B_{id}(u) w_i \mathbf{p}_i$$

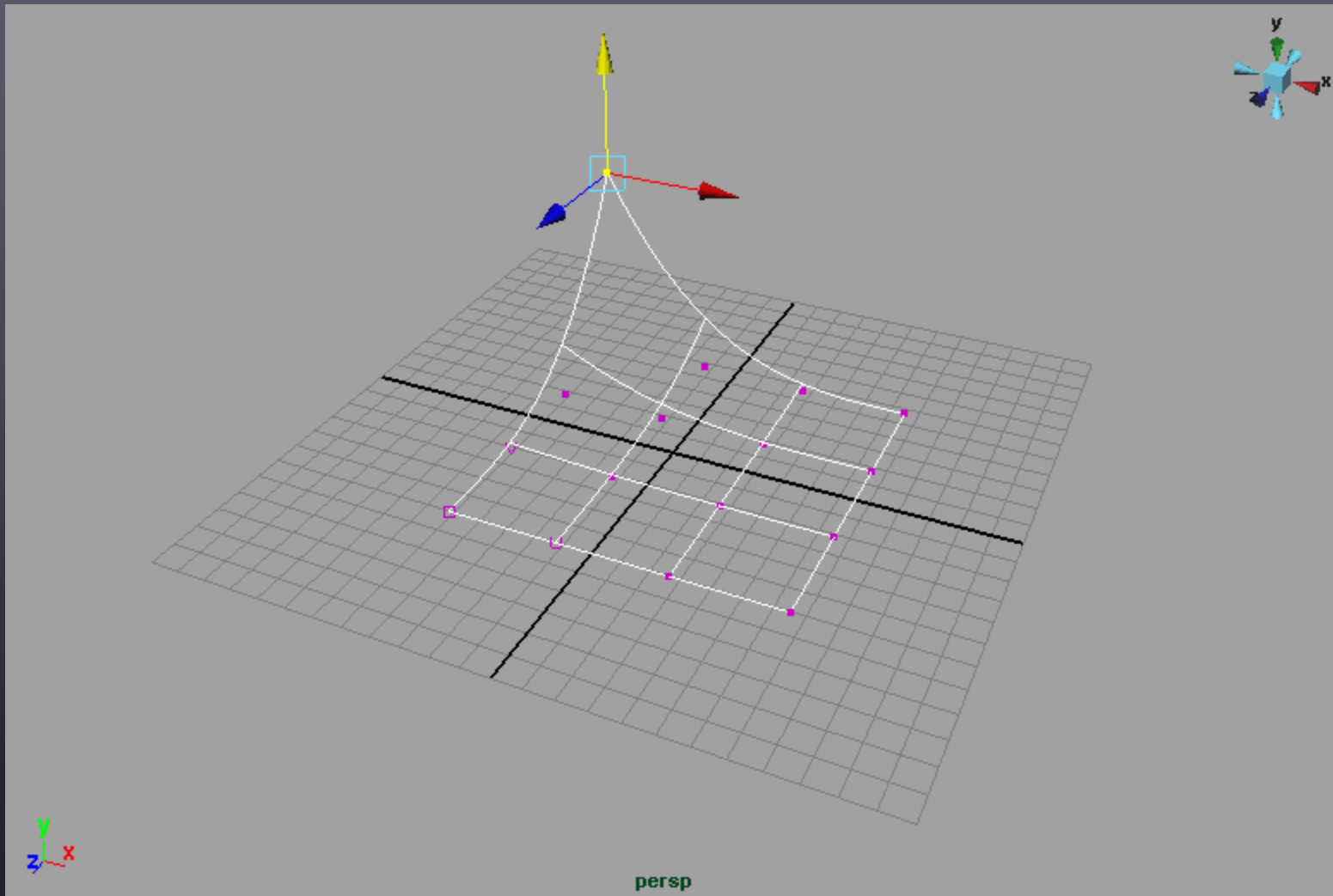
Anledningen är att man vill ge användaren
explicit kontroll över hur mycket av varje
styrapunkt som ska "tas med".

En annan fördel är att en affin transformation
av en NURBS är ekvivalent med samma
transformation av styrapunkterna.

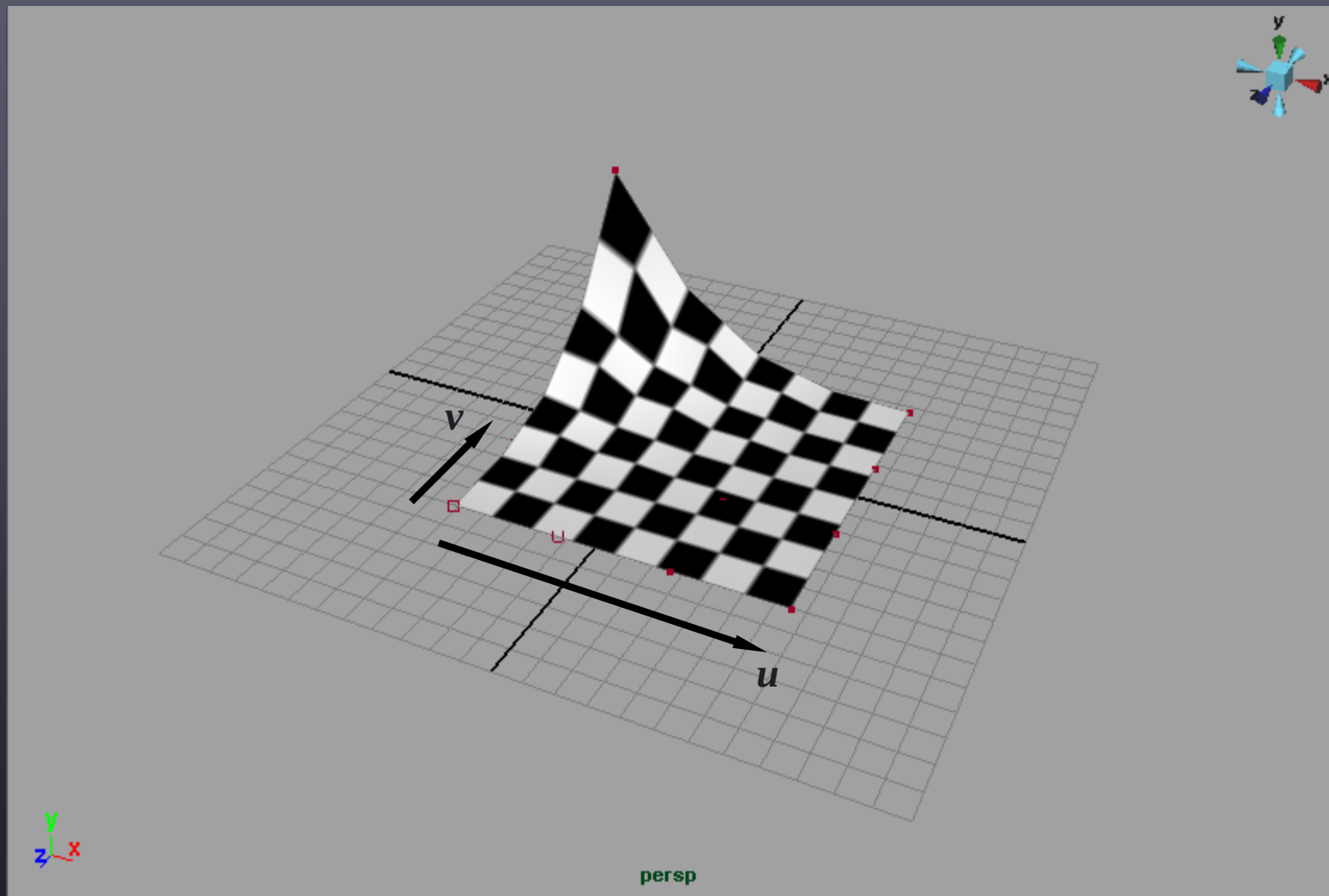
NURBS



NURBS



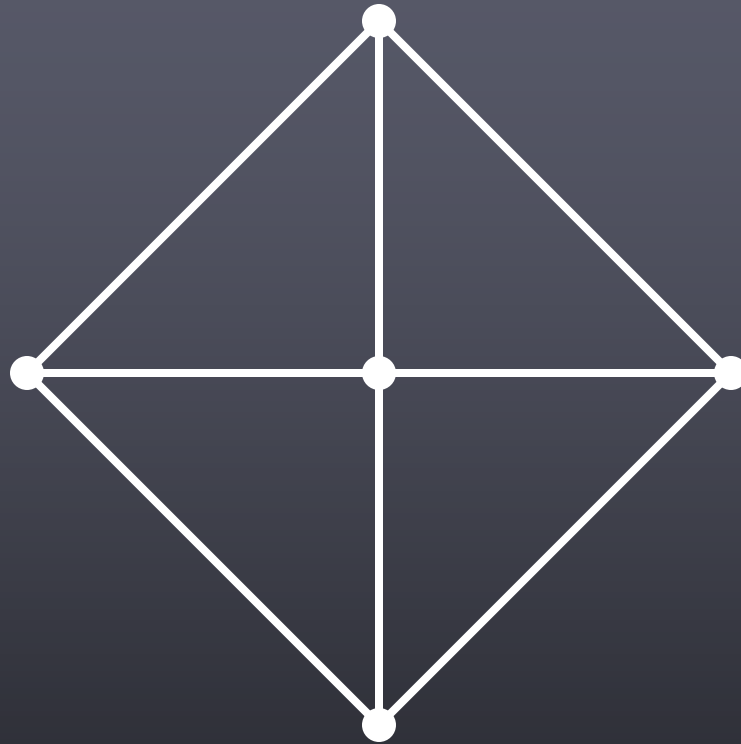
NURBS



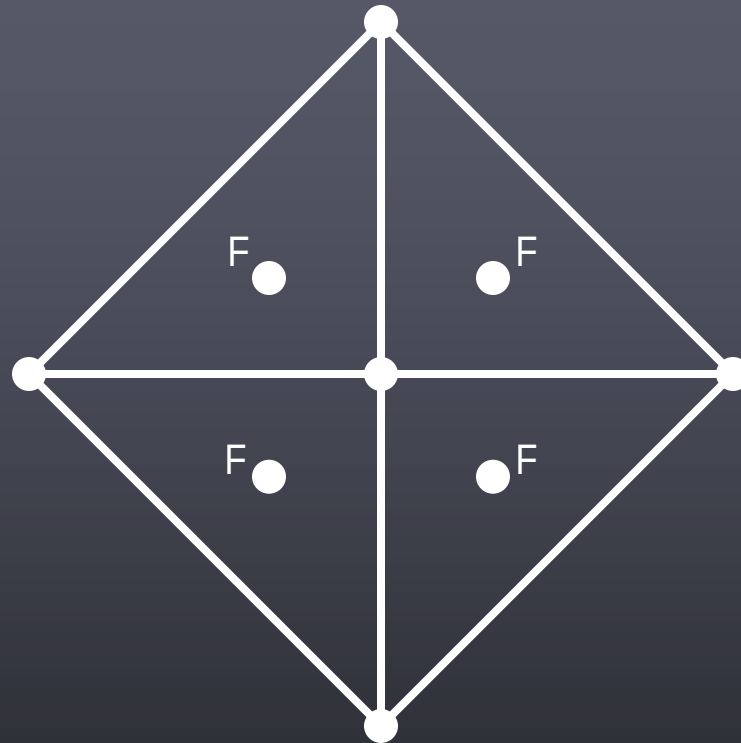
Catmull-Clark-ytor

Om man använder kombinationer av polynomytor kan det vara svårt att undvika "sprickor" på ställen där ytorna möts.

Catmull-Clark-splines

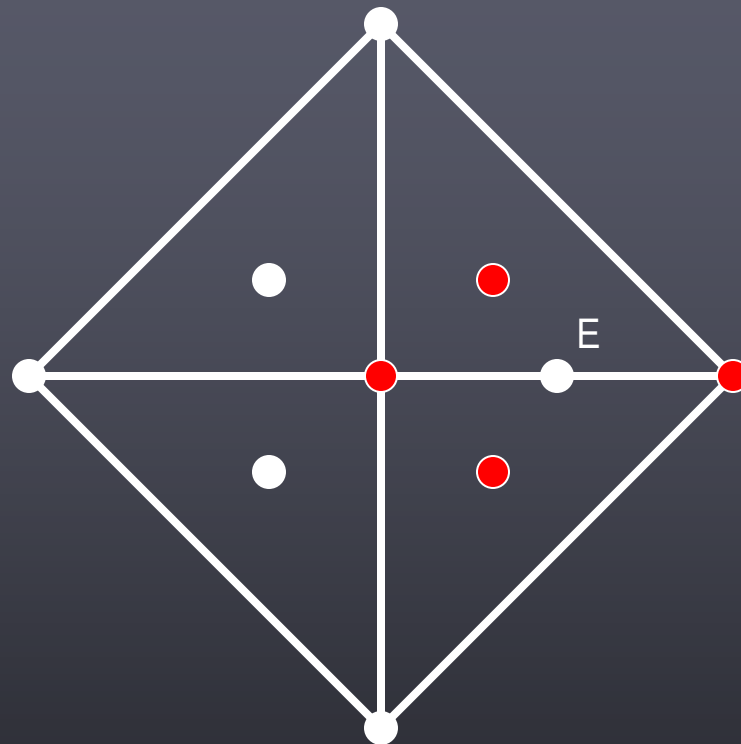


Catmull-Clark-ytor



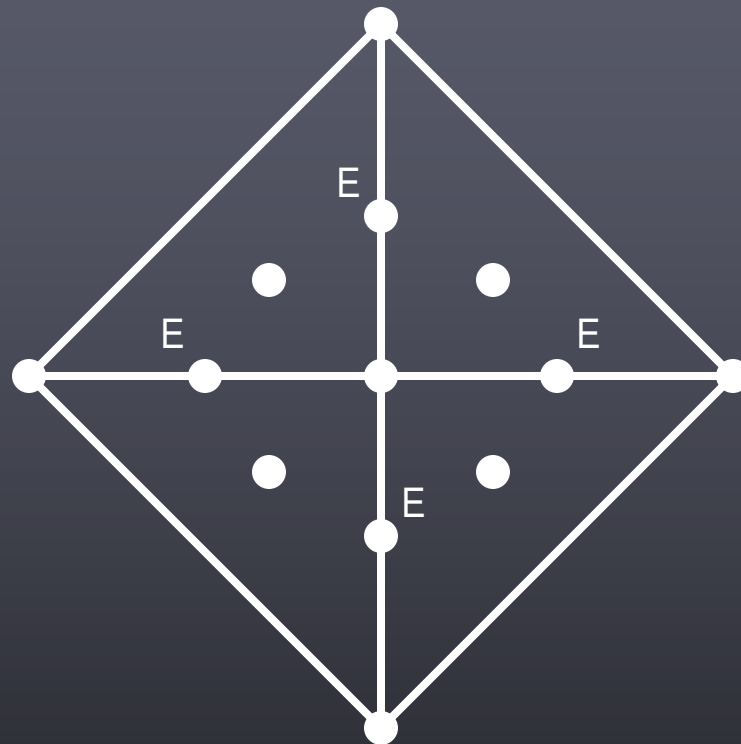
Face points – medelvärdet av hörnen som definierar polygonerna

Catmull-Clark-ytor



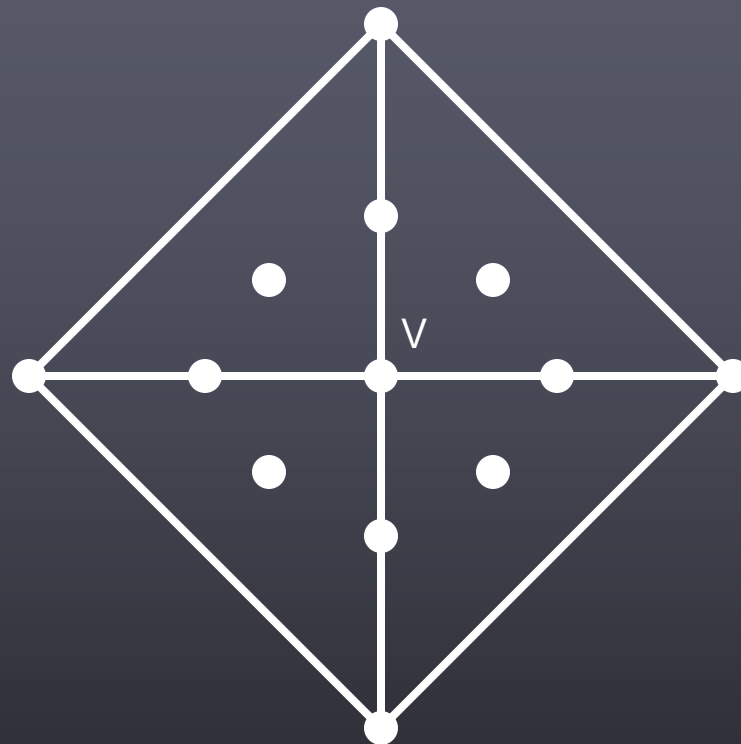
Edge points – medelvärdet av hörnen som definierar en kant
och de två nya face points som hör till polygonerna som hör
till kanten

Catmull-Clark-ytor



Edge points – medelvärdet av hörnen som definierar en kant och de två nya face points som hör till polygonerna som hör till kanten

Catmull-Clark-ytor



Vertex point – den punkt som är gemensam för polygonerna.

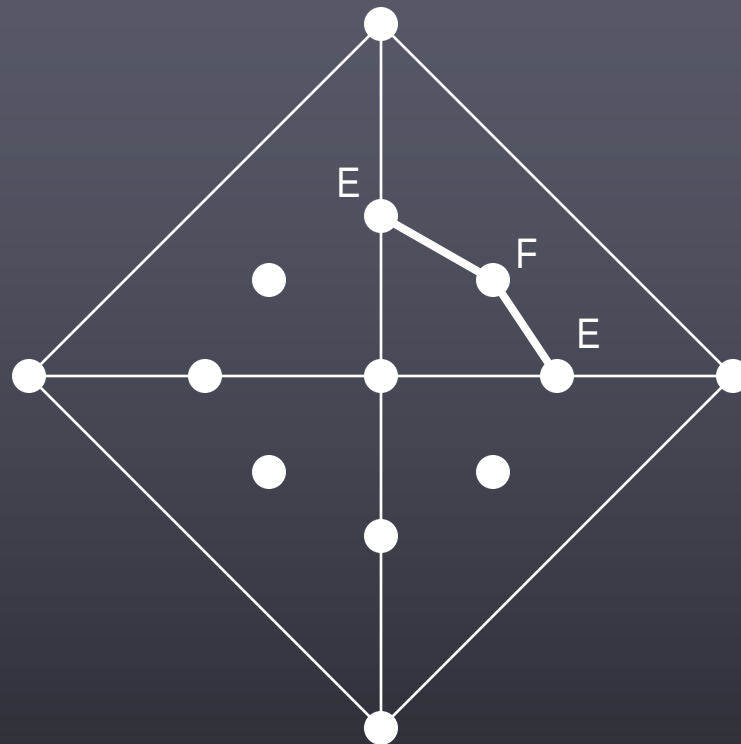
$$V = (Q + ((n-3)/n)S + 2R) / 3$$

Q = medelvärdet av alla nya face points

S = den ursprungliga vertex point

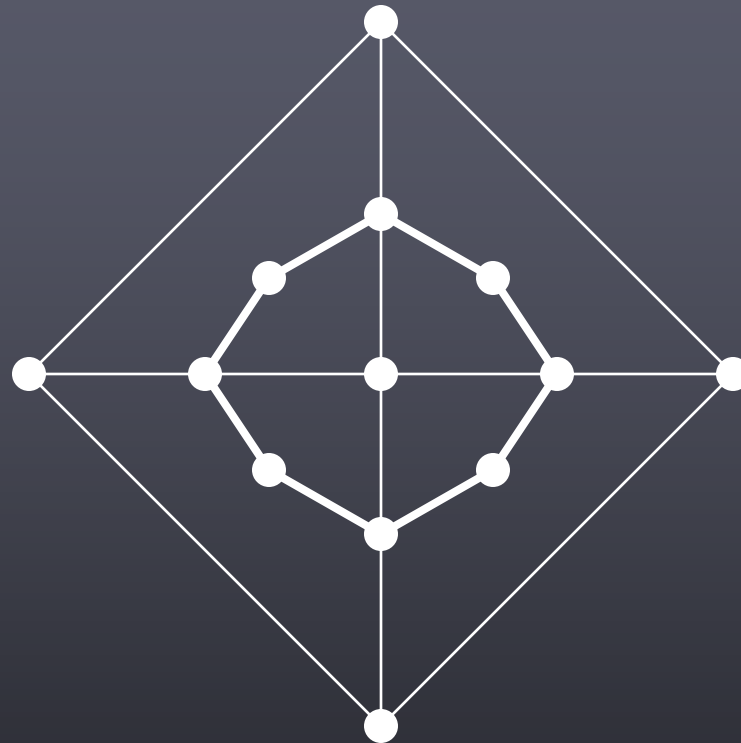
R = medelvärdet av mittpunkten för de kanter som hör till S

Catmull-Clark-ytor



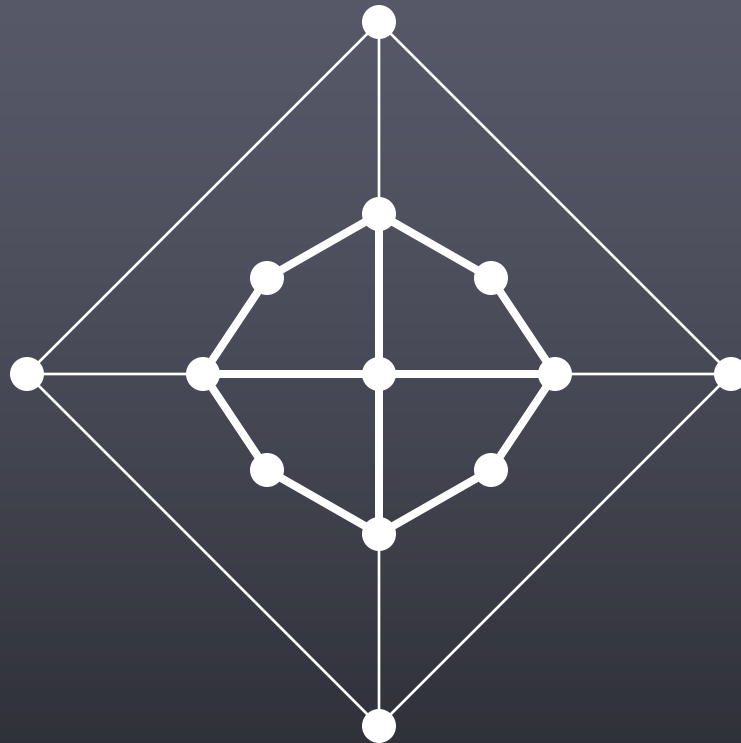
Bind samman face points med de edge points som hör till den polygonen

Catmull-Clark-ytor



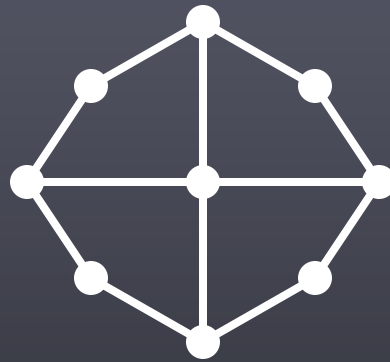
Bind samman face points med de edge points som
hör till den polygonen

Catmull-Clark-ytor



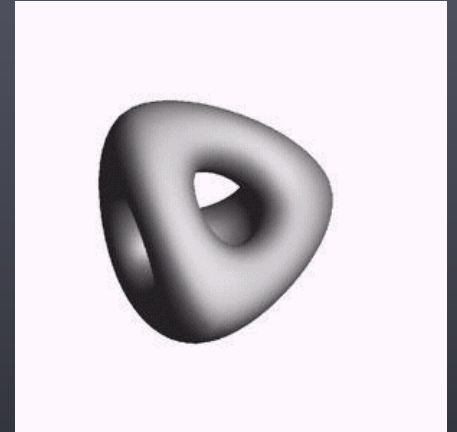
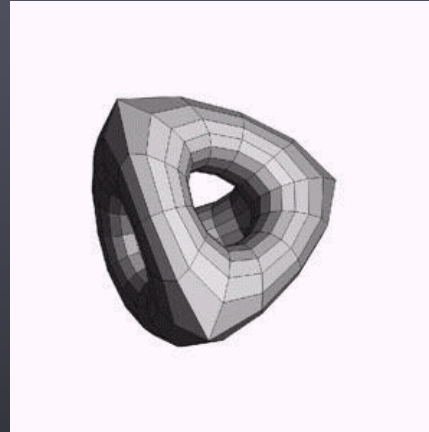
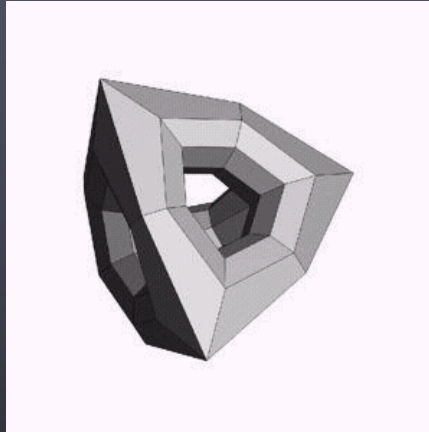
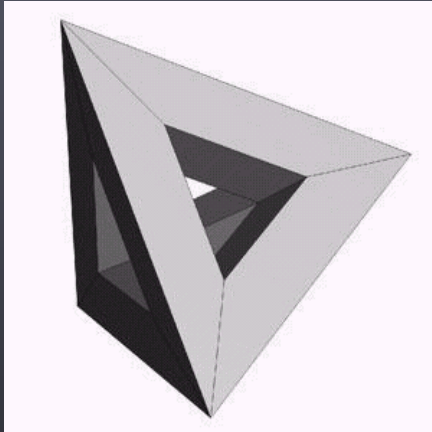
Bind samman vertex point med edge points

Catmull-Clark-yltor

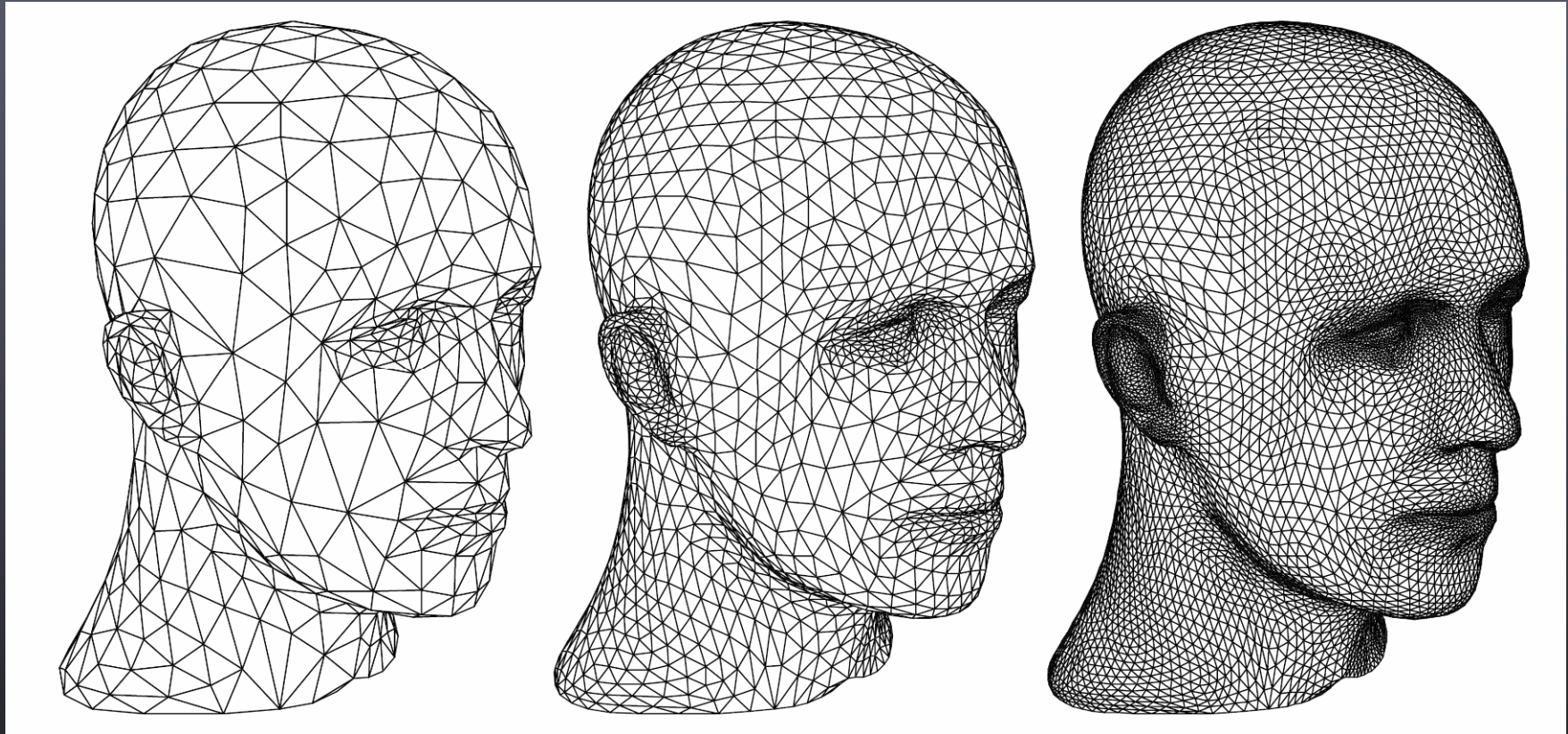


En iteration klar!

Catmull-Clark-splines

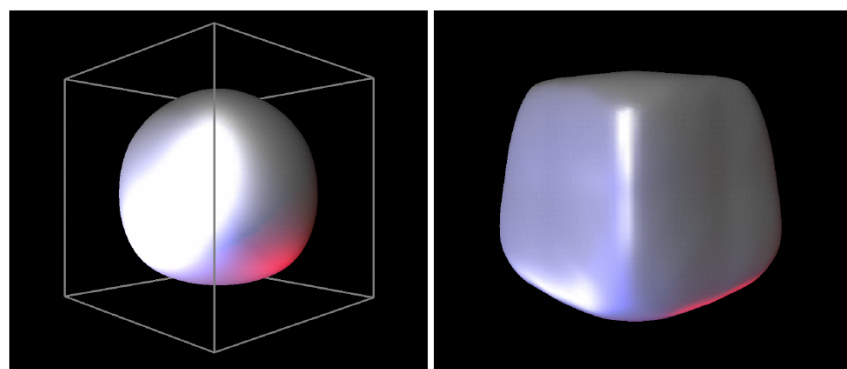


Catmull-Clark-yltor



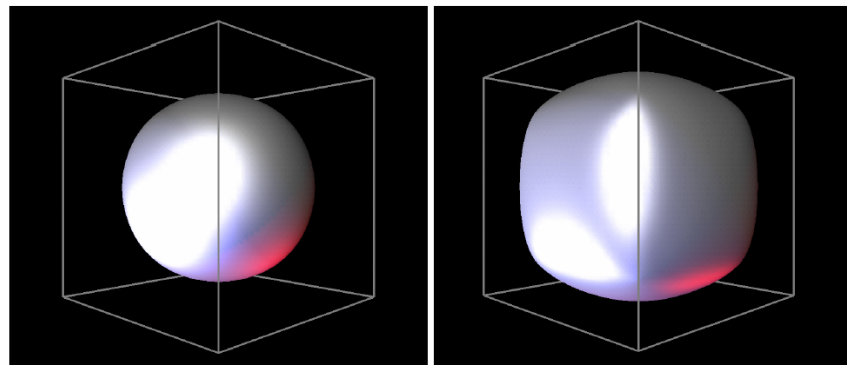
Subdivision for Modeling and Animation
SIGGRAPH 2000 Course Notes

Subdivision schemes



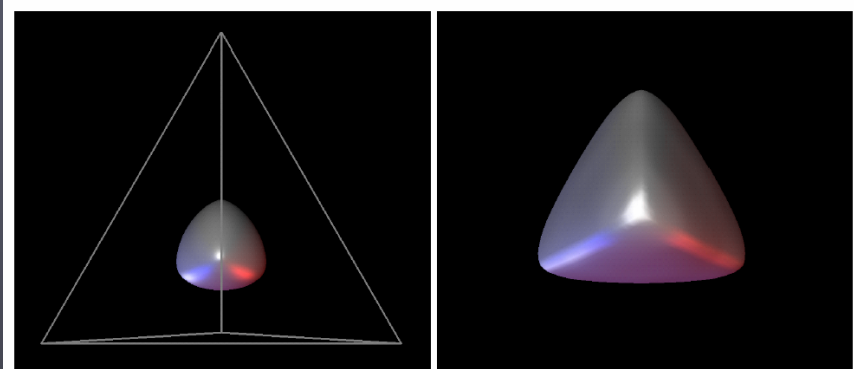
Loop

Butterfly



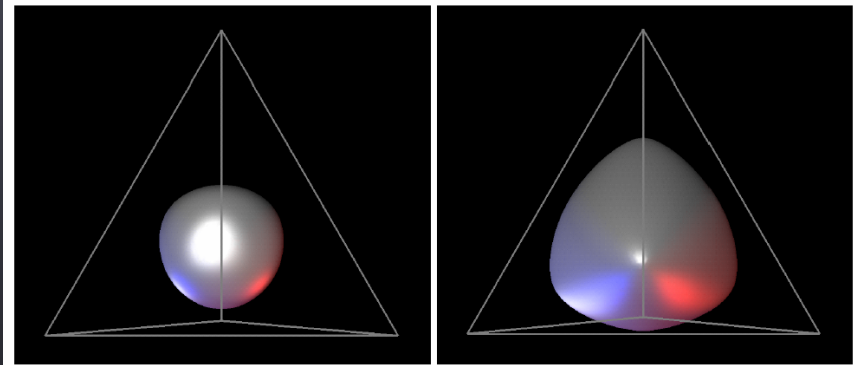
Catmull-Clark

Doo-Sabin



Loop

Butterfly

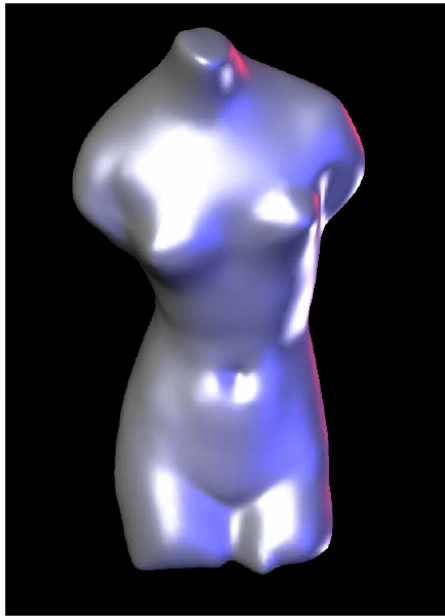


Catmull-Clark

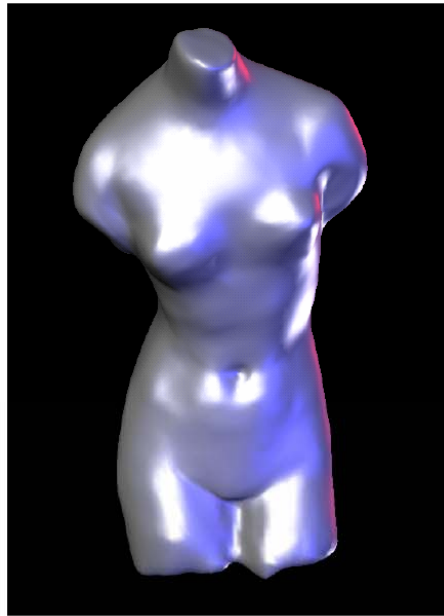
Doo-Sabin

Subdivision for Modeling and Animation
SIGGRAPH 2000 Course Notes

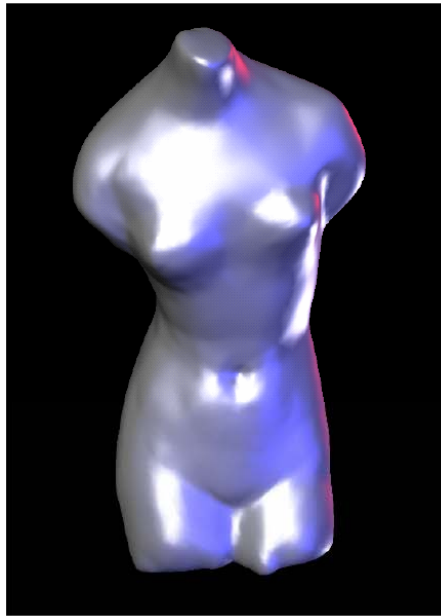
Subdivision schemes



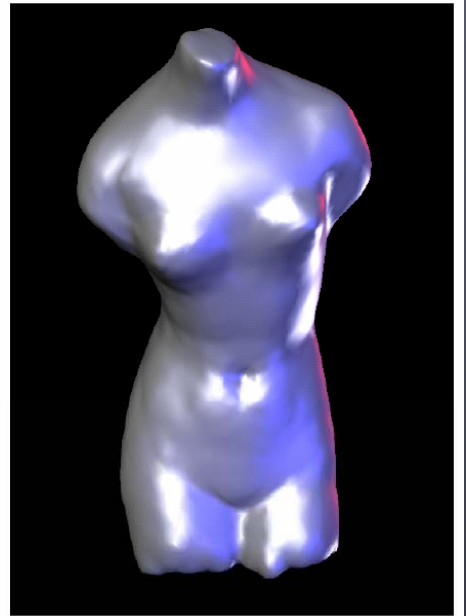
Loop



Butterfly



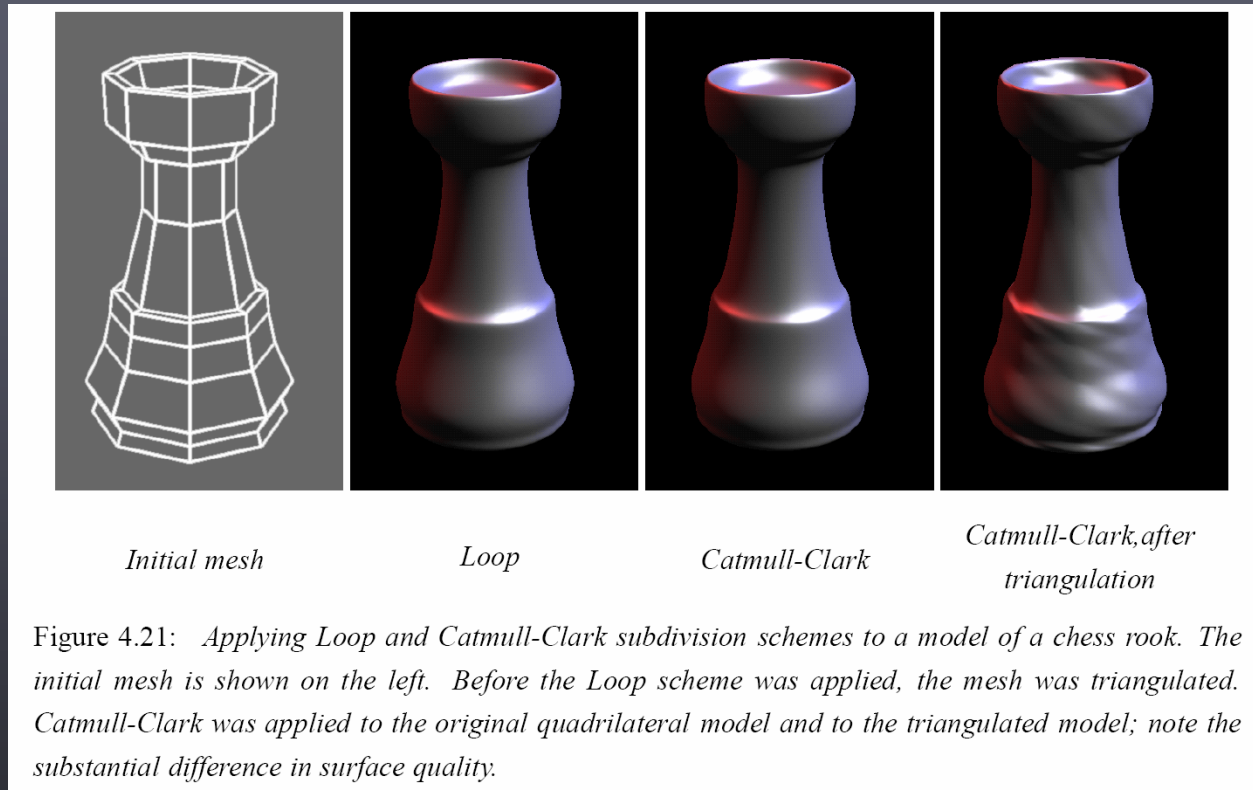
Catmull-Clark



Doo-Sabin

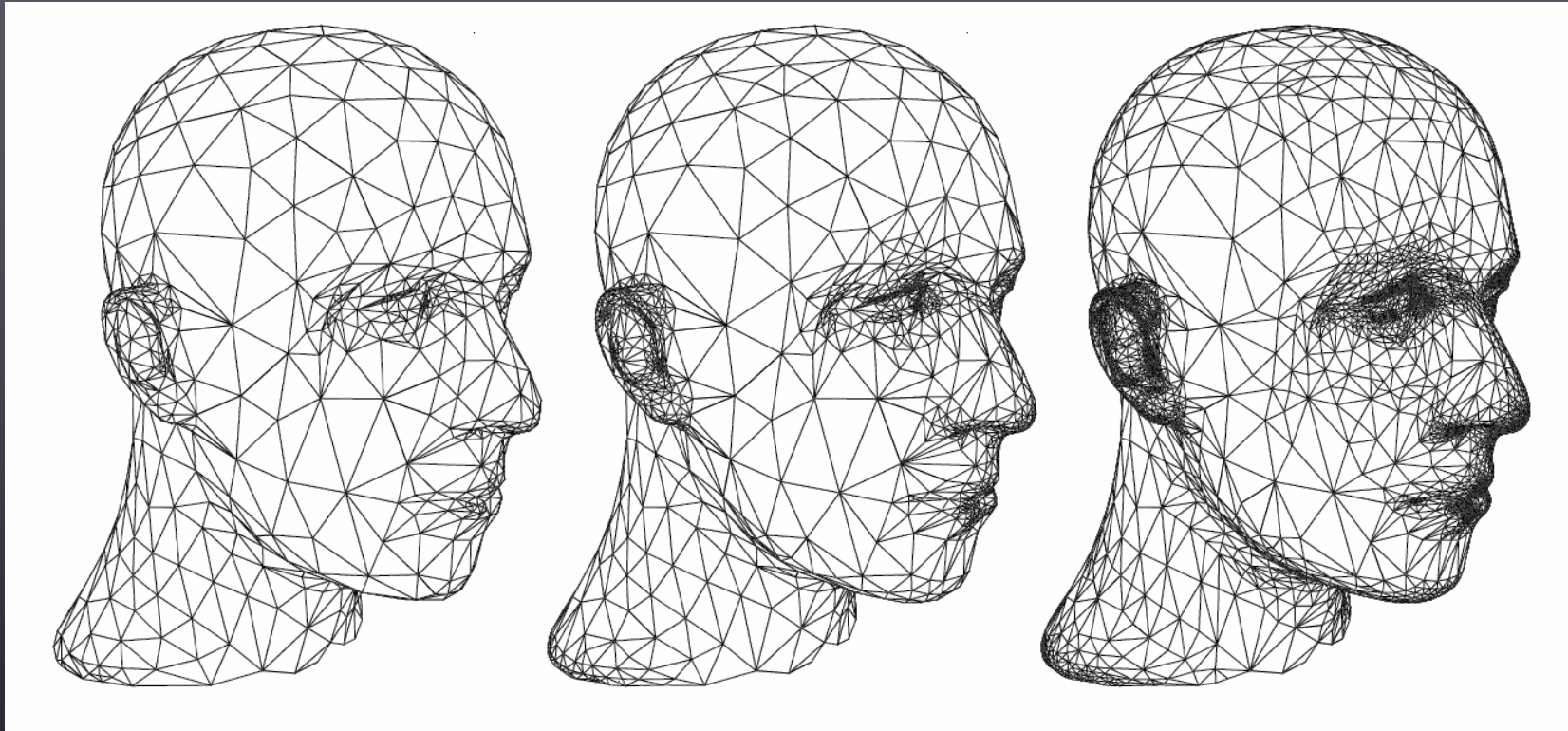
Figure 4.20: *Different subdivision schemes produce similar results for smooth meshes.*

Subdivision schemes



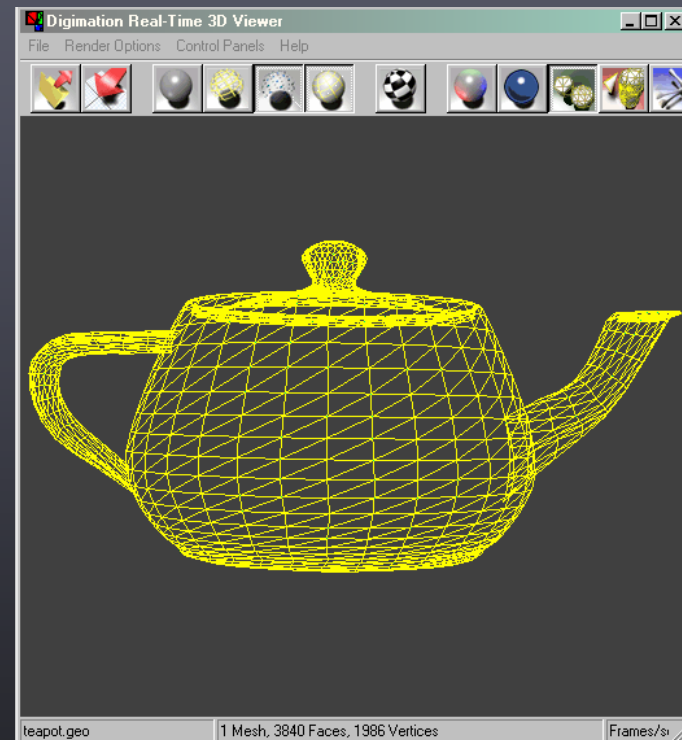
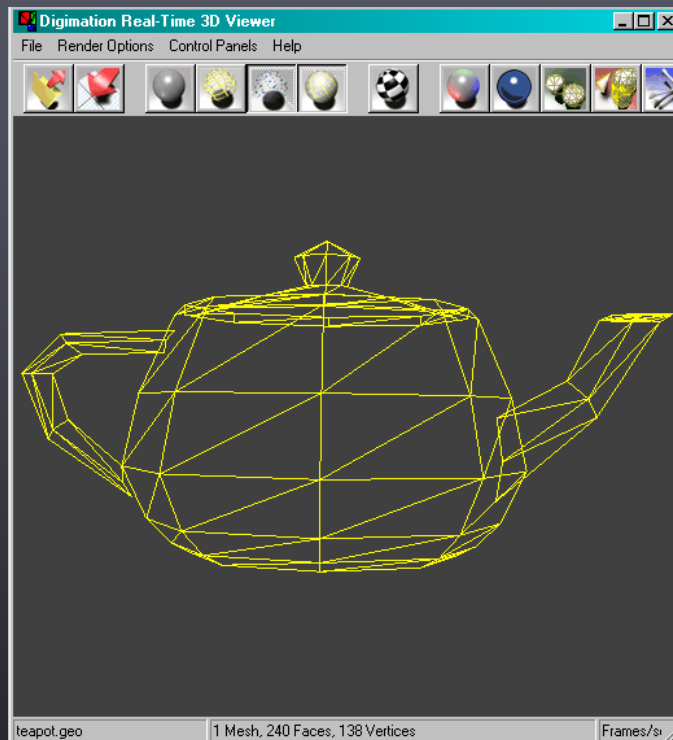
Detta är en av anledningarna till varför man eftersträvar fyrsidiga polygoner i Maya.

Adaptive subdivision schemes



Subdivision for Modeling and Animation
SIGGRAPH 2000 Course Notes

Catmull-Clark-splines: Exempel



Pixar

www.designpicture.com

Jim Kalogiratos