



Kurvor och ytor

Yngve Sundblad och Gustav Taxén
y@kth.se & gustavt@csc.kth.se

DH2640 Grafik och Interaktionsprogrammering VT 2008

Komplettering av föreläsning 10

Gimbal = Stabiliseringsanordning

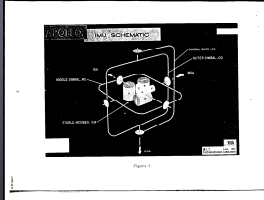
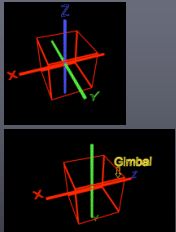


Figure 1

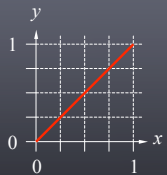


<http://www.anticz.com/eularqua.htm>



Representation av kurvor

	Generellt	Exempel
Explicit	$y = f(x)$	$y = x$
Implicit	$f(x, y) = 0$	$x - y = 0$
Parametrisk	$x = f_x(u)$ $y = f_y(u)$ $u_{min} \leq u \leq u_{max}$	$x = u$ $y = u$ $0 \leq u \leq 1$



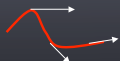
I 3D, med z, lägg till: explicit: $z = g(x)$;
 implicit: $f(x, y, z) = 0$ & $g(x, y, z) = 0$; parameter $z = f_z(u)$

Parametriska kurvor

Om vi deriverar uttrycket för kurvan

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \end{bmatrix}$$

får vi en vektor som definierar kurvans tangent:

$$\frac{d\mathbf{p}(u)}{du} = \begin{bmatrix} \frac{df_x(u)}{du} \\ \frac{df_y(u)}{du} \end{bmatrix}$$


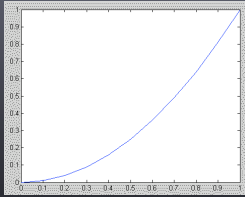
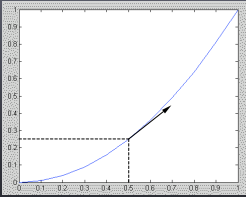
Exempel

$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} u \\ u^2 \end{bmatrix}$

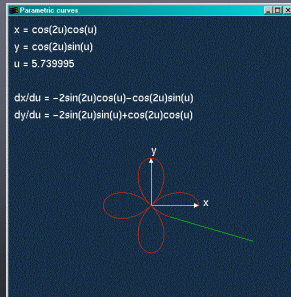
$0 \leq u \leq 1$

$\frac{d\mathbf{p}(u)}{du} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2u \end{bmatrix}$

I $u = 0.5$ får vi tangenten $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

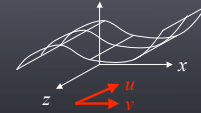
Exempel



Ytor

	Generellt	Exempel
Explicit	$z = f(x, y)$	$z = xy$
Implicit	$f(x, y, z) = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
Parametrisk	$x = f_x(u, v)$	$x = u + v$
	$y = f_y(u, v)$	$y = u - v$
	$z = f_z(u, v)$	$z = u^2 + v^2$
	$u_{min} \leq u \leq u_{max}$	$0 \leq u \leq 1$

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{pmatrix} f_x(u, v) \\ f_y(u, v) \\ f_z(u, v) \end{pmatrix}$$



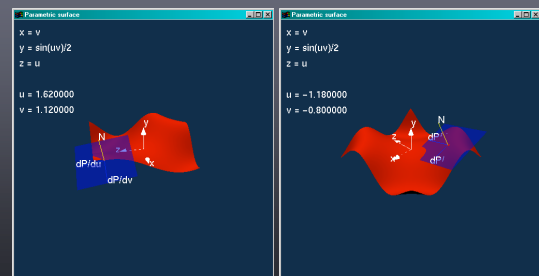
Parametriska ytor

De vektorer vi får om vi deriverar m.a.p. u och v definierar ytans **tangentplan**:

$$\frac{\partial \mathbf{p}(u, v)}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_z(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{p}(u, v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{p}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(u, v)}{\partial v} \quad \text{är ytans normal.}$$

Exempel



Parametriska polynomkurvor

Då $\mathbf{p}(u)$ är ett polynom i u kallas kurvan **polynomkurva**.

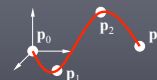
$$\mathbf{p}(u) = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \\ f_z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + \dots + u^nc_{xn} \\ c_{y0} + uc_{y1} + u^2c_{y2} + \dots + u^nc_{yn} \\ c_{z0} + uc_{z1} + u^2c_{z2} + \dots + u^nc_{zn} \end{pmatrix}$$

$$0 \leq u \leq 1$$

Polynomkurvor, visar det sig, har egenskaper som är intressanta för datorgrafik och CAD/CAM. Främst används tredjegrads- (kubiska) polynom.

Interpolerande polynomkurvor

Antag att vi har fyra **stympunkter** $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ och $\mathbf{p}_3$ och att vi vill att kurvan ska gå genom dessa punkter.



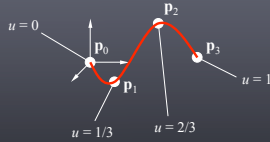
$$\mathbf{p}_0 = (p_{0x} \ p_{0y} \ p_{0z})^T, \mathbf{p}_1 = (p_{1x} \ p_{1y} \ p_{1z})^T, \mathbf{p}_2 = (p_{2x} \ p_{2y} \ p_{2z})^T, \mathbf{p}_3 = (p_{3x} \ p_{3y} \ p_{3z})^T$$

Vi samlar koordinaterna i tre vektorer:

$$\mathbf{p}_x = \begin{pmatrix} p_{0x} \\ p_{1x} \\ p_{2x} \\ p_{3x} \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_y = \begin{pmatrix} p_{0y} \\ p_{1y} \\ p_{2y} \\ p_{3y} \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_z = \begin{pmatrix} p_{0z} \\ p_{1z} \\ p_{2z} \\ p_{3z} \end{pmatrix}$$

Interpolerande polynomkurvor

Vi bestämmer att kurvan ska gå genom styrpunkterna vid $u = 0, u = 1/3, u = 2/3$ och $u = 1$.



Vilka polynomkoefficienter ska vi ha?

Interpolerande polynomkurvor

Låt oss börja med x-komponenten. Vi hade att

$$f_x(u) = c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3}$$

och vi vill ha

$$f_x(0) = p_{0x} \quad f_x(1/3) = p_{1x} \quad f_x(2/3) = p_{2x} \quad f_x(1) = p_{3x}$$

$$\begin{aligned} u=0: & \quad p_{0x} = c_{x0} \\ u=1: & \quad p_{3x} = c_{x0} + c_{x1} + c_{x2} + c_{x3} \\ u=1/3: & \quad p_{1x} = c_{x0} + (1/3)c_{x1} + (1/3)^2c_{x2} + (1/3)^3c_{x3} \\ u=2/3: & \quad p_{2x} = c_{x0} + (2/3)c_{x1} + (2/3)^2c_{x2} + (2/3)^3c_{x3} \end{aligned}$$

Interpolerande polynomkurvor

Löser man ekvationssystemet får man

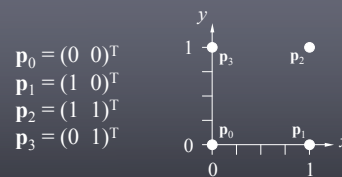
$$\begin{aligned} c_{0x} &= p_{0x} \\ c_{1x} &= -5.5p_{0x} + 9p_{1x} - 4.5p_{2x} + p_{3x} \\ c_{2x} &= 9p_{0x} - 22.5p_{1x} + 18p_{2x} - 4.5p_{3x} \\ c_{3x} &= -4.5p_{0x} + 13.5p_{1x} - 13.5p_{2x} + 4.5p_{3x} \end{aligned}$$

Koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5.5 & 9 & -4.5 & 1 \\ 9 & -22.5 & 18 & -4.5 \\ -4.5 & 13.5 & -13.5 & 4.5 \end{pmatrix}$ kallas interpolationsgeometrimatris och kan användas vid all sådan interpolation

y- och z-komponenterna får samma värden.

Kurvan som har dessa c-koefficienter sägs **interpolera** de fyra styrpunkterna.

Exempel



Exemplet

$$f_x(u) = c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3}$$

$$\mathbf{p}_0 = (0 \ 0)^T \quad \mathbf{p}_1 = (1 \ 0)^T \quad \mathbf{p}_2 = (1 \ 1)^T \quad \mathbf{p}_3 = (0 \ 1)^T$$

$$\begin{aligned} c_{0x} &= p_{0x} \\ c_{1x} &= -5.5p_{0x} + 9p_{1x} - 4.5p_{2x} + p_{3x} \\ c_{2x} &= 9p_{0x} - 22.5p_{1x} + 18p_{2x} - 4.5p_{3x} \\ c_{3x} &= -4.5p_{0x} + 13.5p_{1x} - 13.5p_{2x} + 4.5p_{3x} \end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned} c_{0x} &= 0 \\ c_{1x} &= -5.5 \cdot 0 + 9 \cdot 1 - 4.5 \cdot 1 + 0 = 4.5 \\ c_{2x} &= 9 \cdot 0 - 22.5 \cdot 1 + 18 \cdot 1 - 4.5 \cdot 0 = -4.5 \\ c_{3x} &= -4.5 \cdot 0 + 13.5 \cdot 1 - 13.5 \cdot 1 + 4.5 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Exemplet

$$f_y(u) = c_{y0} + uc_{y1} + u^2c_{y2} + u^3c_{y3}$$

$$\mathbf{p}_0 = (0 \ 0)^T \quad \mathbf{p}_1 = (1 \ 0)^T \quad \mathbf{p}_2 = (1 \ 1)^T \quad \mathbf{p}_3 = (0 \ 1)^T$$

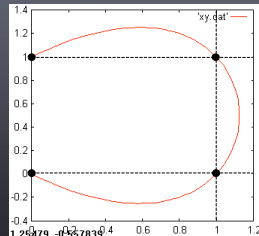
$$\begin{aligned} c_{0y} &= p_{0y} \\ c_{1y} &= -5.5p_{0y} + 9p_{1y} - 4.5p_{2y} + p_{3y} \\ c_{2y} &= 9p_{0y} - 22.5p_{1y} + 18p_{2y} - 4.5p_{3y} \\ c_{3y} &= -4.5p_{0y} + 13.5p_{1y} - 13.5p_{2y} + 4.5p_{3y} \end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned} c_{0y} &= 0 \\ c_{1y} &= -5.5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 - 4.5 \cdot 1 + 1 = -3.5 \\ c_{2y} &= 9 \cdot 0 - 22.5 \cdot 0 + 18 \cdot 1 - 4.5 \cdot 1 = 13.5 \\ c_{3y} &= -4.5 \cdot 0 + 13.5 \cdot 0 - 13.5 \cdot 1 + 4.5 \cdot 1 = -9 \end{aligned}$$

Exemplet

$$\begin{cases} f_x(u) = 0 + 4.5u - 4.5u^2 + 0 \cdot u^3 \\ f_y(u) = 0 - 3.5u + 13.5u^2 - 9u^3 \end{cases}$$



Blandningspolynom

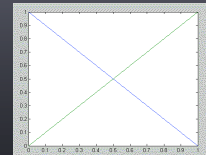
Funktion $b(u)$ som visar hur varje styrm punkt bidrar till kurvan när u sveps från 0 till 1.

Exempel: En kurva som interpolerar två styrm punkter:

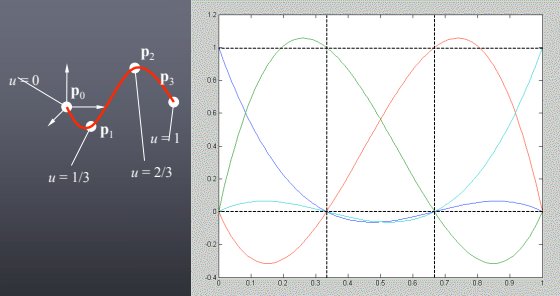
$$\begin{aligned} f_x(u) &= (1-u)p_{0x} + up_{1x} \\ f_y(u) &= (1-u)p_{0y} + up_{1y} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} b_0(u) &= 1-u \\ b_1(u) &= u \end{aligned}$$



Blandningspolynom



Blandningspolynom för en interpolerande kurva.

En **parametrisk kubisk polynomkurva** är en kurva på formen

$$\mathbf{p}(u) = b_0(u)\mathbf{p}_0 + b_1(u)\mathbf{p}_1 + b_2(u)\mathbf{p}_2 + b_3(u)\mathbf{p}_3$$

där

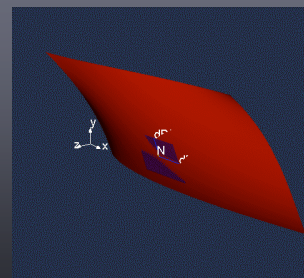
$\mathbf{p}_i$ är kurvans **styrm punkter** och $b_i(u)$ är kurvans **blandningspolynom**.

Kubiska polynomytor

$$\mathbf{p}(u,v) = \begin{bmatrix} f_x(u,v) \\ f_y(u,v) \\ f_z(u,v) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \begin{bmatrix} c_{xij} \\ c_{yij} \\ c_{zij} \end{bmatrix} u^i v^j$$

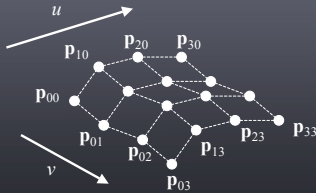
$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq 1 \\ 0 &\leq v \leq 1 \end{aligned}$$

Exempel



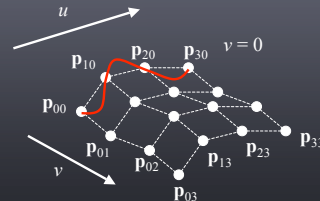
Interpolerande polynomytor

Kräver 16 stympunkter:



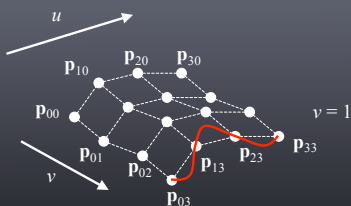
Interpolerande polynomytor

Om vi sätter $v = 0$ får vi en kurva som ska interpolera punkterna p_{00} , p_{10} , p_{20} och p_{30} .



Interpolerande polynomytor

Sätter vi $v = 1$ får vi en kurva som måste interpolera punkterna p_{03} , p_{13} , p_{23} och p_{33} .

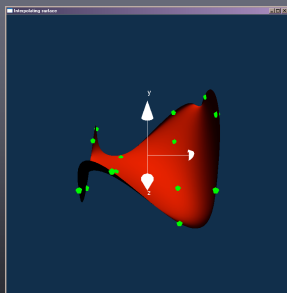


Interpolerande polynomytor

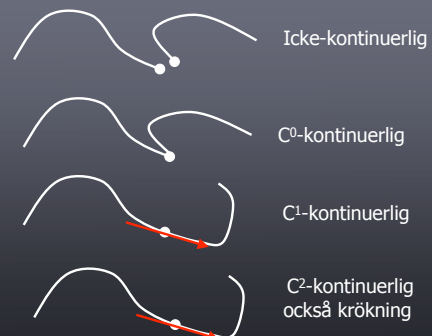
Lägger man till $v = 1/3$ och $v = 2/3$ får man ett linjärt ekvationssystem.

När man löser detta (se boken) får man koefficienterna för polynomen.

Interpolerande polynomytor



Sammanlänkning av kurvor



Hermitekurvor

Fås om man kräver C1-kontinuitet.
Kurvans ekvation är (i 2D)

$$\begin{aligned}f_x(u) &= c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3} \\f_y(u) &= c_{y0} + uc_{y1} + u^2c_{y2} + u^3c_{y3}\end{aligned}$$

Vi behåller första och sista stympunkten:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= (p_{0x} \ p_{0y})^T \\ \mathbf{p}_3 &= (p_{3x} \ p_{3y})^T\end{aligned}$$

Hermitekurvor

Sedan väljer vi tangenten i $\mathbf{p}_0$ och $\mathbf{p}_3$ explicit, d.v.s.

$$\frac{df(u=0)}{du} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(u)}{du} \Big|_{u=0} \\ \frac{df_y(u)}{du} \Big|_{u=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{0x} \\ p'_{0y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{df(u=1)}{du} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(u)}{du} \Big|_{u=1} \\ \frac{df_y(u)}{du} \Big|_{u=1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{3x} \\ p'_{3y} \end{pmatrix}$$

Hermitekurvor

För x-komponenten är kurvans ekvation

$$f_x(u) = c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3}$$

och dess derivata är

$$f'_x(u) = c_{x1} + 2uc_{x2} + 3u^2c_{x3}$$

så

$$\begin{aligned}p_{0x} &= f_x(0) = c_{x0} \\ p_{3x} &= f_x(1) = c_{x0} + c_{x1} + c_{x2} + c_{x3} \\ p'_{0x} &= f'_x(0) = c_{x1} \\ p'_{3x} &= f'_x(1) = c_{x1} + 2c_{x2} + 3c_{x3}\end{aligned}$$

Hermitekurvor

Löser vi ekvationssystemet får vi

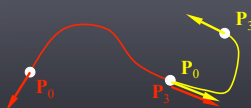
$$f_x(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{0x} \\ p_{1x} \\ p'_{0x} \\ p'_{1x} \end{pmatrix}$$

Hermite-geometri
matris

y- och z-komponenterna blir samma.

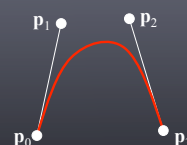
Sammanlänkning av kurvor

Vi kan få C1-kontinuitet genom att sätta samman två Hermitekurvor där tangenten är densamma i $\mathbf{P}_3$ för första kurvan och $\mathbf{P}_0$ för andra kurvan:



Beziérkurvor

Samma som Hermite men specificeras lite annorlunda.
Derivatorna sätts till



$$\frac{d\mathbf{p}_0}{du} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)/(1/3)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_3}{du} = 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

För att kurvan ska ritas med linjär hastighet m.a.p. u .
(Verkar rimligt, kan visas.)

Beziérkurvor

$$f_x(u) = c_{x0} + uc_{x1} + u^2c_{x2} + u^3c_{x3}$$

$$f'_x(u) = c_{x1} + 2uc_{x2} + 3u^2c_{x3}$$

$$p_{0x} = c_{x0}$$

$$p_{1x} = c_{x0} + c_{x1} + c_{x2} + c_{x3}$$

$$3(p_{1x} - p_{0x}) = f'_x(0) = c_{x1}$$

$$3(p_{3x} - p_{2x}) = f'_x(1) = c_{x1} + 2c_{x2} + 3c_{x3}$$

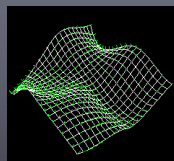
Beziérkurvor

Lösningen blir

$$f_x(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{1x} \\ p_{2x} \\ p_{3x} \end{bmatrix}$$

Bézier-geometri
matris

Beziérytor

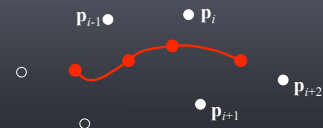


På motsvarande sätt som för interpolerande ytor
(se boken).

Kubiska B-splinekurvor

En nackdel med Hermitekurvor är att
C¹-kontinuitet inte alltid räcker.

Det kan lösas genom att man släpper kravet att kurvan ska
interpolera slutpunkterna på kurvan.



Kubiska B-splinekurvor

Se boken för härledning:

$$f_x(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i-2} \\ p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \end{bmatrix}$$

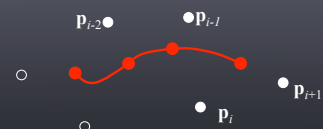
B-spline-geometri
matris

Kubiska B-splinekurvor

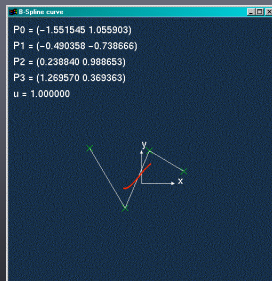
Se boken för härledning:

Nackdelen med Hermitekurvor är att
C¹-kontinuitet inte alltid räcker.

Det kan lösas genom att man släpper kravet att kurvan ska
interpolera slutpunkterna på kurvan.



Exempel



Generaliserade B-splinekurvor

Vi kan generalisera B-splinekurvsbegreppet.
Vi kan konstruera en funktion

$$\mathbf{p}(u) = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \\ f_z(u) \end{pmatrix}$$

över intervallen

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n$$

Värdena $u_0, u_1, \dots, u_n$ kallas **knutar**.

Generaliserade B-splinekurvor

Den **generaliserade B-splinekurvas** ekvation är

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n B_{id}(u) \mathbf{p}_i$$

där $B_{id}(u)$ är en **basfunktion**,
i det här fallet ett polynom av grad d
(och $\mathbf{p}_i$ är styrpunkterna)

Väljer man $B_{i3}(u)$ som blandningspolynom för en
kubisk B-spline (se boken) och knutarna
 $\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1\}$
får man en Beziérkurva.

NURBS

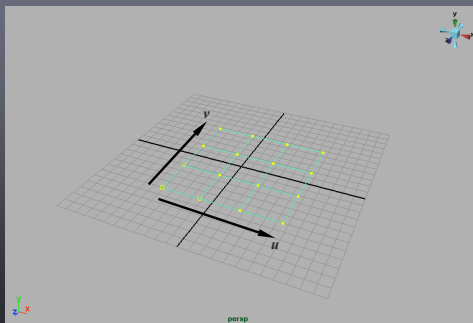
NURBS = Non-Uniform Rational B-Spline
Variant av generaliserad B-Spline där
man viktat de olika styrpunkterna.

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n B_{id}(u) w_i \mathbf{p}_i$$

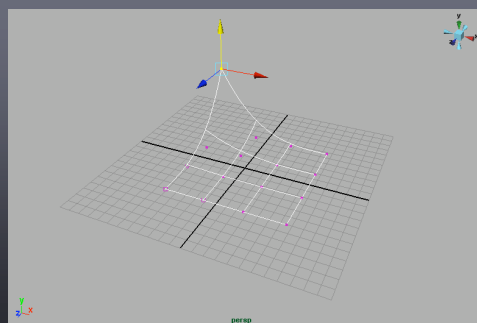
Anledningen är att man vill ge användaren
explicit kontroll över hur mycket av varje
styrpunkt som ska "tas med".

En annan fördel är att en affin transformation
av en NURBS är ekvivalent med samma
transformation av styrpunkterna.

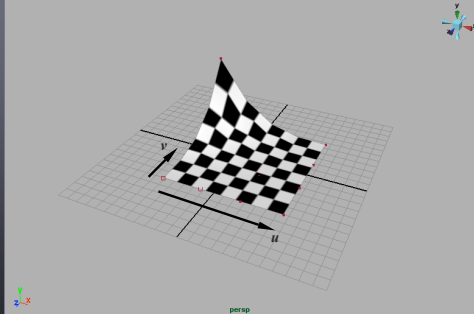
NURBS



NURBS



NURBS



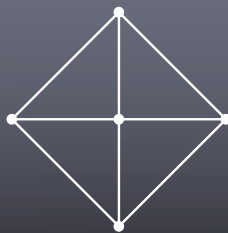
Uppdelning i ytor - prodecurer



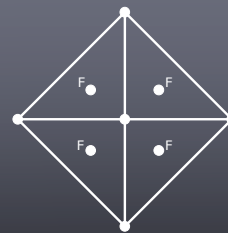
Om man använder kombinationer av polynomytor kan det vara svårt att undvika "sprickor" på ställen där ytorna möts. Detta kan man undvika med ytuppdelningsprocedurer som Catmull-Clark m.fl.

Pixar

Catmull-Clark-ytor

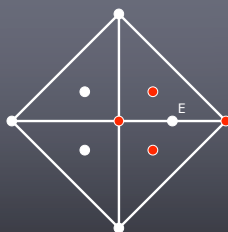


Catmull-Clark-ytor



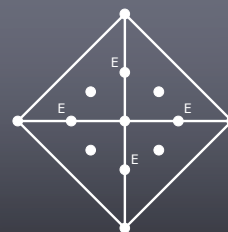
Face points – medelvärde av hörnen som definierar polygonerna

Catmull-Clark-ytor



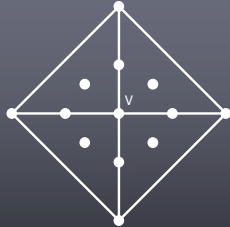
Edge points – medelvärde av hörnen som definierar en kant och de två nya face points som hör till polygonerna som hör till kanten

Catmull-Clark-ytor



Edge points – medelvärde av hörnen som definierar en kant och de två nya face points som hör till polygonerna som hör till kanten

Catmull-Clark-yltor

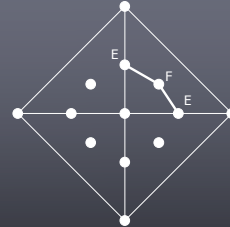


Vertex point – den punkt som är gemensam för polygonerna.

$$V = (Q + ((n-3)/n)S + 2R) / 3$$

 Q = medelvärde av alla nya face points
 S = den ursprungliga vertex point
 R = medelvärde av mittpunkten för de kanter som hör till S

Catmull-Clark-yltor



Bind samman face points med de edge points som hör till den polygonen

Catmull-Clark-yltor



Bind samman face points med de edge points som hör till den polygonen

Catmull-Clark-yltor



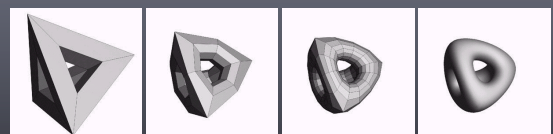
Bind samman vertex point med edge points

Catmull-Clark-yltor

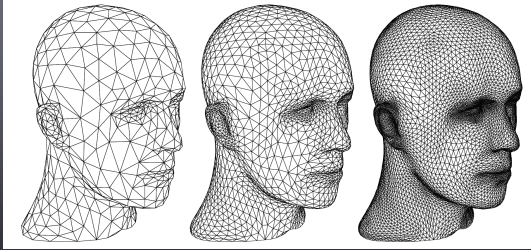


En iteration klar!

Catmull-Clark-yltor



Catmull-Clark-ytor

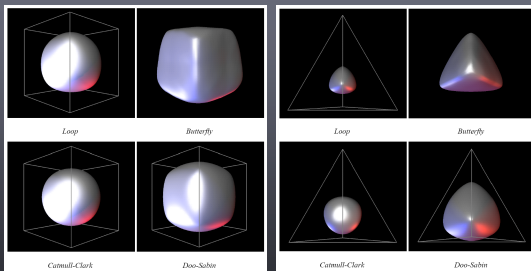


Subdivision for Modeling and Animation
SIGGRAPH 2000 Course Notes

Annat uppdelningsschema: Loop

Utgår istället från trianglar.
Sammanbind triangelns midpunkter och bilda fyra nya inre trianglar.
Viss modifikation med viktning, se boken.

Ytuppdelningsschemata



Subdivision for Modeling and Animation
SIGGRAPH 2000 Course Notes

Subdivision schemes

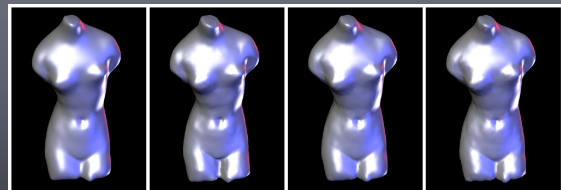


Figure 4.20: Different subdivision schemes produce similar results for smooth meshes.

Subdivision for Modeling and Animation
SIGGRAPH 2000 Course Notes

Subdivision schemes

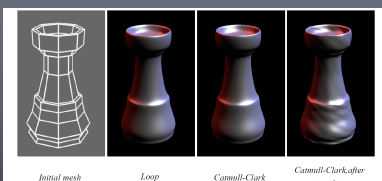
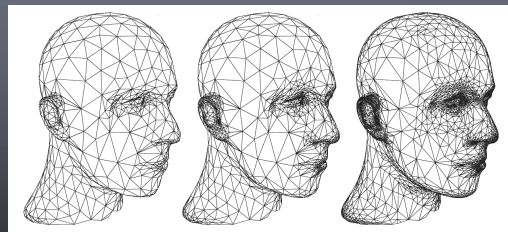


Figure 4.21: Applying Loop and Catmull-Clark subdivision schemes to a model of a chess rook. The initial mesh is shown on the left. Before the Loop scheme was applied, the mesh was triangulated. Catmull-Clark was applied to the original quadrilateral model and to the triangulated model; note the substantial difference in surface quality.

Detta är en av anledningarna till varför man eftersträvar
fyr-sidiga polygoner i Maya.

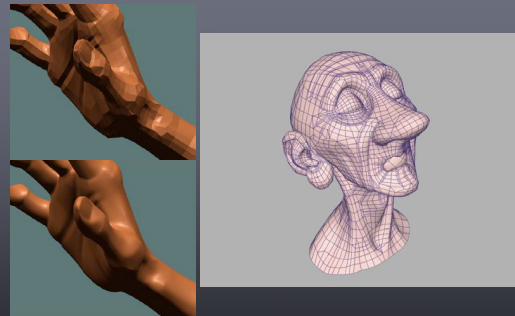
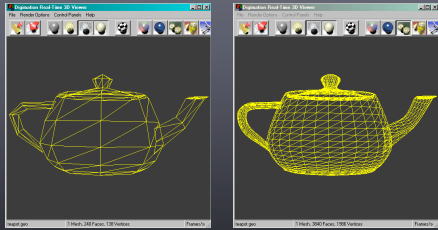
Subdivision for Modeling and Animation
SIGGRAPH 2000 Course Notes

Adaptive subdivision schemes



Subdivision for Modeling and Animation
SIGGRAPH 2000 Course Notes

Catmull-Clark-ytor: Exempel



Inlämningsuppgift 3

Utdelad idag, finns på webben.

Individuell, skickas till y@kth.se senast 11 april.

(Något utsträckt tid)

Fiktiv extenta

FinDet är smidigare att skriva rambytet på matrisform:

på webben senast fredag 4 april.

Genomgår sista föreläsningen, 14 maj.

Tenta 27 maj 8-13, Q-salar

Nästa föreläsningssjok

Lasse & Gustav, 2 april - 7 maj

Projekt / inl.uppg.4

Yngve presenterar 25 april, inlämning 12 maj, redov. 15 maj