

LABORATION 3

Integration, Differentialekvationer, Kryptoforcering

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper). Sista dag för bonuspoäng: 11/10 2012.

1. Numerisk integrering - noggrannhetsordning

Följande integral ska beräknas

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{x+2} dx$$

A. Gör först följande laborationsförberedande uppgifter a)-c):

- a) Rita först en graf över integranden, dvs $y = \sqrt{x+2}$. Uppskatta den sökta integralens värde ur grafen. Svar: $I \approx$
- b) Beräkna integralens värde analytiskt, dvs exakt. Svar: $I =$

I nedanstående tabell har ett antal trapetsvärden som approximerar I redan beräknats:

h	$T(h)$	$E_T = T(h) - I$	$\Delta T(h)$	$T_{extr}(h)$	$E_{T_{extr}} = T_{extr}(h) - I$
1	x	x	x	—	—
0.5	x	x	x	x	x
0.25	2.796336	x	x	x	x
0.125	2.797160	x	x	x	x
0.0625	2.797366	x	x	y	x

- c) Räkna ut och fyll i för hand de värden som ska stå i x -positionerna samt i y -positionen. Antag att y -värdet tas som approximation till I . Uppskatta *trunkeringsfelet* i detta värde utifrån vad som sagts på föreläsningen eller vad som står i NAM, sid 60 (Experimentell felskattning).
Använd värdena $\sqrt{1.5} = 1.224745$, $\sqrt{2} = 1.414214$, $\sqrt{2.5} = 1.581139$, $\sqrt{3} = 1.732051$

B. Skriv sedan ett MATLABprogram som beräknar integralen numeriskt med trapetsregeln (se NAM 5.2). Undersök hur *trunkeringsfelet*, E_T , beror av steglängden, h , genom att plotta felen som funktion av steglängderna $h = 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$. Använd MATLABs kommando `loglog` för ploten. Visa hur vi uppskattar metodens noggrannhetsordning, p , med hjälp av denna plot. Vad blir p ?

Utöka sedan programmet så att integralen beräknas med trapetsregeln och en extrapolation. Plotta i samma diagram som ovan felet $E_{T_{extr}}$ som funktion av h . Vad blir noggrannhetsordningen p nu?

För trapetsregelns noggrannhetsordning gäller

$$|e_T| = |I - T(h)| \approx Ch^p$$

där C är en konstant, $T(h)$ är det numeriskt uträknade integralvärdet (med trapetsregeln eller trapetsregeln och en extrapolation) och I är det exakta värdet.

2. Numerisk integrering - svängningstiden för en pendel

I den här uppgiftsdelen skall du räkna ut svängningstiden för en pendel. En pendels svängningstid T beror av utslagsvinkeln φ_0 enligt formeln:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} I(\varphi_0)$$

där L är pendelns längd, g är tyngdaccelerationen och

$$I(\varphi_0) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2(\sin \varphi)^2}}, \quad k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

Låt $L = 1$ m och $g = 9.81$ m/s². Skriv ett program som beräknar svängningstiden T för φ_0 -värdena 5, 10, ..., 90 grader. För att beräkna integralen $I(\varphi_0)$ används Matlabfunktionen `quad`. Plotta resultatet, dvs T som funktion av φ_0 i en graf (plotbild 1).

En ofta använd approximation av T är svängningstiden för små svängningar:

$$\tilde{T} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Denna approximation är bra för små utslagsvinklar, men relativfelet ökar med ökande utslagsvinkel. Plotta $\tilde{T}$ -värdet i samma graf som ovan, dvs plotbild 1.

Gör även en graf som visar relativfelet i $\tilde{T}$ som funktion av utslagsvinkeln då $5 \leq \varphi_0 \leq 90$ grader, plotbild 2.

3. Begynnelsevärdesproblem - Partikelflöde förbi en cylinder

En långsträckt cylinder med radien $R = 2$ befinner sig i en inkompressibel vätska som strömmar i positiv x -riktning med hastigheten 1. Cylinderns axel är vinkelrät mot flödesriktningen. Det hela kan betraktas som ett tvådimensionellt problem i rummet. Läget, $x(t)$ och $y(t)$ för en flödespartikel vid tiden t bestäms av partikelns startposition, $x(0)$ och $y(0)$ och följande system av differentialekvationer

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2R^2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

a) Skriv om systemet på vektorform, dvs

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

där $\mathbf{u} = (x, y)^T$. Skriv den MATLABfunktion som svarar mot högerledet.

b) Beräkna med hjälp av `ode45` och rita strömningskurvor för tre flödespartiklar som vid beräkningens början befinner sig vid $x = -4$ och vid y -positionerna 0.4, 1.0 och 1.6. Använd `axis('equal')`.

4. Differentialekvationer — randvärdesproblem

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L och med tvärsnittsarean A .

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = Q(x), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \quad (1)$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L . Konstanten k är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymnsenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Antag att $L = 2$ [m], $k = 2.5$ [$J/(K \cdot m \cdot s)$], $T_0 = 300$ [K], $T_L = 400$ [K] och $Q(x)$ [$J/(s \cdot m^3)$] är funktionen

$$Q(x) = 300e^{-(x-\frac{L}{2})^2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

Differentialekvation med randvillkor (1) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$, där $h(n+1) = L$ och approximerar andraderivatans med centraldifferens erhålles

$$\frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{k}Q(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Diskretiseringen leder till ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b \quad (4)$$

där A är en $n \times n$ -matris, T är en $n \times 1$ -vektor med temperaturvärden i det inre av intervallet och b är en $n \times 1$ -vektor som beror av bl a randvärdena T_0 och T_L samt $Q(x_i)$ -värdena.

a) Skriv ner matrisen A för $n = 4$ med **papper och penna**. Vilken struktur har matrisen A ?

b) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet. Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Matrisen skapar du i MATLAB på följande sätt: `e = ones(n,1); A = spdiags([-e 2*e -e], -1:1, n,n);` Kommandot `spdiags` är ett kommando för att skapa glesa matriser. Gör `help spdiags` för mer information.

Med MATLAB-satsen `Afull=full(A)` skrivs matrisen A ut på vanlig form. Gör det för $n = 4$ och jämför med resultatet i uppgift a).

Räkna ut temperaturen T för fallet $N = 249$. Lösningen får du genom att lösa det linjära ekvationssystemet $AT = b$ i MATLAB med `\`. Lösningen T kommer att innehålla temperaturen i alla punkter x_i utom i randpunkterna. Plotta temperaturen som funktion av x på hela intervallet $0 \leq x \leq L$.

Hur stor är den minimala och maximala temperaturen? (Plocka fram det minsta och största värdet i vektorn T).

5. Kryptoforcering

Denna deluppgift behandlar hantering av text som data.

Kryptografi har blivit en del av vår vardag även om vi inte tänker så mycket på det. När du loggar in på din personliga banksida eller pratar i mobiltelefonen sker kommunikationen krypterat. När man använder kryptering konverterar man en klartext till en kryptotext med hjälp av en krypteringsmetod och vanligen dessutom en krypteringsnyckel. Att konvertera tillbaka kallas att dekryptera. Om man inte känner till krypteringsmetod eller nyckel måste man gissa för att återfinna klartexten. Att göra det systematiskt kallas att forcera kryptotexten. I denna laboration ska du skriva ett program som forcerar en krypterad text där vi vet krypteringsmetoden men själva måste hitta nyckeln och sedan dekryptera texten. Ditt program ska läsa och dekryptera en text på engelska som finns på fil. Det finns många olika algoritmer för kryptering men vi förutsätter att texten är krypterad med "caesarrullning" vilket innebär att varje bokstav har bytts ut mot en bokstav ett visst antal steg framåt i alfabetet. Nyckeln är antalet positioner man rullar. Med 2 positioners rullning blir "The zebra has stripes" krypterat till "Vjg bgdtc jcu uvtkrgu". Med vetskap om att "e" är den vanligaste bokstaven i engelsk text kan texten forceras med hjälp av ett frekvensdiagram. Om t ex bokstaven "g" är den mest frekventa i kryptotexten kan man gissa att rullningen är 2 steg.

Ditt program ska läsa in den krypterade texten (inklusive blanktecken och radbytestecken) från en fil till en vektor bestående av tecken. Skriv även ut den krypterade texten på skärmen. Därefter visas ett frekvensdiagram (använd t ex `pie` i MATLAB) över de 10 mest frekventa bokstäverna i den krypterade texten. Det blir enklare om du först gör om alla bokstäver till versaler. Därefter väljer du antal rullningssteg och skriver ut texten efter rullning. Ditt program bör lämna andra tecken än bokstäver oförändrade. När texten visar en vettig mening är rullningen korrekt.

En trevlig bok om kryptering är Simon Singh, "Kodboken". I slutet av boken finns en dekrypteringstävling som var öppen för alla i hela världen att försöka knäcka. Först ut att lösa detta krypto var ett gäng Datalogi-doktorander från KTH.

LABORATION 3 redovisad och helt klar!

Datum:

Godkänd av:

Studentens namn: