OH till Föreläsning 7, Numme T1, 120118

100 m^2 butikslokal?

```
+---------------------------+       16 * 6 = 96
I                           I
I 6m                        I       16.5 * 6.5 = 107.25
I           16m             I
+---------------------------+       15.5 * 5.5 =  85.25
```

För att minska osäkerheten, vilken sida är viktigast att mäta om?

Mät om korta sidan, antag den fås till 6.460

```
Max  16.5 * 6.4605 = 106.59825
Min  15.5 * 6.4595 = 100.12225
```

OK, vi vet att arean $> 100m^2$

Mät om långa sidan, antag den fås till 16.460

```
Max  16.4605 * 6.5 = 106.99325
Min  16.4595 * 5.5 =  90.52725
```

Vi vet ännu inte om arean är $> 100m^2$

Allmänna felfortplantningsformeln, AFFF, GKN 2:2E sid 37

Det beräknade värdet f beror av två indata (observabler), x och y, dvs $f = f(x,y)$. Osäkerheten i f pga osäkerheten i x och y blir då:

$$E_f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| E_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| E_y \quad \left(+ \ldots + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right| E_x E_y + \ldots\right)$$

$$f(x,y) = xy, \quad x = 16 \pm 0.5, \quad y = 6 \pm 0.5$$

$$f = xy = 16 \cdot 6 = 96 \qquad E_f = |y|\,E_x + |x|\,E_y = 6E_x + 16E_y = 6 \cdot 0.5 + 16 \cdot 0.5 = 3 + 8 = 11$$

Så om sidorna är uppmätta till 16 och 6 meter (dvs 16 ± 0.5 respektive 6 ± 0.5) så blir arean $96 \pm 11\ m^2$.

Störningsräkning, GKN 2:3A-2 sid 46

Praktiskt, lätt att göra med miniräknare eller dator: Stör en parameter i taget maximalt. Summera sedan beloppet av störningarna:

$$f(16,6) = 96$$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(16.5,6) = 99 & \Longrightarrow & \Delta = 99 - 96 = 3 \\ f(16,6.5) = 104 & \Longrightarrow & \Delta = 104 - 96 = 8 \end{array}\right\} \quad E_f = |3| + |8| = 11$$

Ostörda värdet är 96 och summan av störningarna är 11, alltså skriver vi att arean är $96 \pm 11\ m^2$

Tillägg om Newton-Raphsons metod (Föreläsning 3)

Det kan bli fel svar även om bara derivatan är fel: Ekvationen $\ln x - 8 = 0$ har en rot nära 2980. Om man i Newton-Raphsons metod sätter $f(x) = \ln x - 8$, $f'(x) = 1/x$ ger startvärdet 2980 och sedan itererar tills korrektionerna är mindre än 0.001 så stannar iterationerna på 2980.958 (efter två varv) men om man råkar derivera fel, $f'(x) = 1/\ln x$, så med samma startvärde och stopp-kriterium som ovan så stannar programmet (efter 353 iterationer) på 2980.587 Rätta svaret är $x = e^8 = 2980.958$ Ser man bara siffrorna i roten är det väldigt svårt att inse att 2980.587 är fel svar. Det verkar ju helt rimligt och tycks stämma om man tittar på en graf (ty heltalssiffrorna OK).

Det kan bli fel svar även om bara startvärdet är fel: Funktionen $f(x) = e^x - 2 - \sin x^2$ har derivatan $f'(x) = e^x - 2x\cos x^2$ Ger man startvärdet $x = -1.295$ och itererar tills korrektionerna är mindre än 0.0005 så stannar iterationerna på -3794.287 (efter två varv). Med startvärdet $x = -1.9$ så stannar iterationerna på det rätta värdet 1.068 (efter 16 varv). Konvergens trots att startvärdet låg längre från roten.

Ännu ett par exempel på att det inte räcker med regeln att iterera tills de önskade siffrorna är lika. Kolla konvergensen så undviker du att acceptera ett felaktigt värde.

Cykelbud?

$$\begin{aligned} a &= 17.0 \pm 0.1m \\ b &= 8.0 \pm 0.1m \\ \varphi &= 30^\circ \pm 1^\circ \\ t &= 2.00 \pm 0.05s \end{aligned} \qquad v = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}}{t}$$

Allmänna FelFortplantningsFormeln (AFFF)

$$v = v(a, b, \varphi, t) = v(17, 8, 30^\circ, 2.00) = 5.4185$$

$$E_v = \left|\frac{\partial v}{\partial a}\right| E_a + \left|\frac{\partial v}{\partial b}\right| E_b + \left|\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right| E_\varphi + \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| E_t$$

$$\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\frac{1}{2}(2a - 2b\cos\varphi)}{t\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}} \quad (= 0.4647) \qquad \frac{\partial v}{\partial b} = \frac{\frac{1}{2}(2b - 2a\cos\varphi)}{t\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}} \quad (= -0.3102)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\frac{1}{2}(-2ab(-\sin\varphi))}{t\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}} \quad (= 3.1374) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}}{t^2} \quad (= -2.7093)$$

$$E_v = 0.4647 \cdot 0.1 + |-0.3102| \cdot 0.1 + 3.1374 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{180} + |-2.7093| \cdot 0.05 = 0.0465 + 0.0310 + 0.0548 + 0.1355 = 0.2677$$

Vi får alltså 5.4185 ± 0.2677 vilket vi skriver $v = 5.42 \pm 0.27$

Störningsräkning

$$v(17, 8, 30^\circ, 2.00) = 5.4185$$

$$\left.\begin{aligned} v(17.1, 8, 30^\circ, 2.00) = 5.4650 &\implies \Delta = +0.0465 \\ v(17, 8.1, 30^\circ, 2.00) = 5.3876 &\implies \Delta = -0.0309 \\ v(17, 8, 31^\circ, 2.00) = 5.4738 &\implies \Delta = +0.0553 \\ v(17, 8, 30^\circ, 2.05) = 5.2864 &\implies \Delta = -0.1322 \end{aligned}\right\} \quad \sum |\Delta| = 0.2648$$

Vi får alltså 5.4185 ± 0.2648 vilket vi skriver $v = 5.42 \pm 0.27$

Min-o-max-räkning:

$$\begin{aligned} v_{max}(17.1, 7.9, 31^\circ, 1.95) &= 5.6928 \\ v_{min}(16.9, 8.1, 29^\circ, 2.05) &= 5.1571 \end{aligned} \implies \begin{aligned} v &= \frac{v_{max} + v_{min}}{2} = 5.4249 \\ E_v &= \frac{|v_{max} - v_{min}|}{2} = 0.2679 \end{aligned} \implies v = 5.42 \pm 0.28$$

Exempel på kancellation, miniräknare med fyra siffror

$$a = 1238, \quad b = 1237, \quad c = a^2 - b^2$$

$$c = a^2 - b^2 = 1238^2 - 1237^2 = 1532644 - 1530169 \to 1.533 \cdot 10^6 - 1.530 \cdot 10^6 = 0.003 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^3 \to 3000$$

Rätta svaret är $2475 = 2.475 \cdot 10^3 \to 2 \cdot 10^3$ Felet beror på att vi fått kancellation, två **nästan lika stora** tal har subtraherats och siffror förlorats. Skriv om beräkningsuttrycket så att kancellationen undviks:

$$c = a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) = (1238 + 1237) \cdot (1238 - 1237) = 2475 \cdot 1 = 2475$$

Exempel på utskiftning, miniräknare med fyra siffror

$$sum = \sum_{n=1}^{4000} \frac{1}{n}$$

```
sum=0;
for n = 1:4000;
  sum = sum + 1/n;
end;
sum
```

```
sum=0;
for n = 1:3000;
  sum = sum + 1/n;
end;
sum
```

```
sum=0;
for n = 3001:4000;
  sum = sum + 1/n;
end;
sum
```

Med övre gränsen 4000 gav programmet utskriften $sum = 8.449$. Men när övre gränsen sänktes till `m=3000;` fick jag ändå samma svar, $sum = 8.449$. Jag provade då att summera från 3001 till 4000, det gav $sum = 0.2857$, då borde ju de första två svaren blivit olika!?

Vi har råkat ut för utskiftning

Grov förklaring: Efter cirka 2000 termer är *sum* ungefär 8.449.

$$n = 2001, \Longrightarrow sum = 8.449 + 1/2001 =$$
$$= 8.449 + 0.0004998 = 8.4494988 = 8.449$$

dvs alla termer efter de första cirka 2000 tappas bort, utskiftas. Man undviker utskiftning genom att undvika att addera och subtrahera **mycket olika stora** tal. Bättre version av vårt program ovan; summera bakifrån:

```
sum=0; for n=4000:-1:1; sum = sum + 1/n; end; sum
```

Detta ger $sum = 8.919$. (och med `for n=3000:-1:1` fås $sum = 8.554$ vilket stämmer bättre med beräkningen 3001:4000 ovan ty $8.919 - 8.554 = 0.365$ men riktigt bra är det inte.)

Ett ännu bättre värde fås med uppdelning så att man summerar ännu mer lika tal: `for n=4000:-1:3001` ger `sum=0.2857`, `for n=3000:-1:2001` ger `sum=0.4080`, `for n=2000:-1:1001` ger `sum=0.6957`, `for n=1000:-1:1` ger `sum=7.485`, vilket summerat blir $(0.2857 + 0.4080) + 0.6957 + 7.485 = (0.6937 + 0.6957) + 7.485 = 1.389 + 7.485 = 8.874$ Rätta värdet på summan med tre decimaler är 8.871.

Fyra typer av felkällor, GKN 2:1D sid 27

- E_{tab} – Osäkerhet i utdata pga osäkerhet i indata.
- E_{ber} – Osäkerhet i utdata pga avrundningar av mellanresultat under beräkningarnas gång. (Görs alltid av miniräknare (ofta ca 10 siffror) eller dator (ofta ca 14-15 siffror)).
- E_{trunk} – Osäkerhet i utdata pga trunkering, tex att vi stannar Newton-Raphson-iterationerna efter ett ändligt antal varv, eller att vi har ändlig steglängd i våra derivata- eller integralskattningar.
- E_{pres} – Ökad felgräns pga avrundning av resultatet vid den slutliga presentationen.

Litet exempel

Vi skall numeriskt lösa ekvationen $e^x - 3 = 0$. Vi vet att en rot ligger nära 1 och fortsätter med Newton-Raphsons metod, $f(x) = e^x - 3$ och $f'(x) = e^x$. Alla beräkningar är gjorda på en miniräknare med alla dess siffror, ca 10 st. Endast i x-kolumnen har jag skrivit upp alla siffror den visade.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	t_n	$K = t_{n-1}^2/t_n$
0	1.000000000	$-2.817 \cdot 10^{-1}$	2.718	$-1.036 \cdot 10^{-1}$	
1	1.103638324	$1.512 \cdot 10^{-2}$	3.015	$5.013 \cdot 10^{-3}$	2.1
2	1.098624898	$3.783 \cdot 10^{-5}$	3.000	$1.261 \cdot 10^{-5}$	2.0
3	1.098612289				

Trunkeringsfelet, E_{trunk}, kan skattas med sista använda korrektionen, här $1.261 \cdot 10^{-5}$. Beräkningsfelet, E_{ber}, ligger oftast i de 2-3 sista siffrorna, dvs här i storleksordningen 10^{-7}. Inga osäkra parametrar fanns med, dvs $E_{tab} = 0$. Summan av dessa tre felgränser ligger tydligen på cirka $1.3 \cdot 10^{-5}$. Om jag då avrundar resultatet till fyra decimaler, 1.0986, gör jag ett presentationsfel $E_{pres} = |1.098612289 - 1.0986| = 0.000012289 = 1.2289 \cdot 10^{-5}$ Totala summan av felgränserna blir $1.2289 \cdot 10^{-5} + 1.3 \cdot 10^{-5} \approx 2.6 \cdot 10^{-5} < 5 \cdot 10^{-5}$ och jag kan säga att roten är 1.0986 (med fyra korrekta decimaler). Alternativa svar är tex 1.0986 ± 0.00005 eller 1.0986 ± 0.00003.

Vill jag ha fler siffror i svaret avrundar jag inte så grovt, utan till sex decimaler, 1.098612. Mitt presentationsfel blir då mindre $E_{pres} = |1.098612289 - 1.098612| = 0.000000289 = 2.89 \cdot 10^{-7}$ Totala summan av felgränserna blir $2.89 \cdot 10^{-7} + 1.261 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-7} < 1.4 \cdot 10^{-5}$ och jag kan säga att roten är 1.098612 ± 0.000014. Jag kan nu inte utelämna felgränsen eftersom de sista siffrorna i svaret är osäkra.

Givetvis finns många fler varianter! Dock gäller att en felgräns inte bör ha fler än två siffror och dessa skall påverka de sista siffrorna i närmevärdet.

- En felgräns måste alltid avrundas uppåt!
- Anges ingen felgräns antas givna siffror säkra!
- Bekväm felskattning: Låt E_{pres} dominera!

Skatta derivator, GKN sid 15, 34, 50 mfl

$$d(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$E_{trunk_{d(x,h)}} \approx |d(x,2h) - d(x,h)| \quad \Big(\sim c \cdot h\Big)$$

$$E_{tab_{d(x,h)}} = \frac{2E_f}{|h|}$$

$$D(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$E_{trunk_{D(x,h)}} \approx |D(x,2h) - D(x,h)| \quad \Big(\sim c \cdot h^2\Big)$$

$$E_{tab_{D(x,h)}} = \frac{2E_f}{2\,|h|} = \frac{E_f}{|h|}$$

Tabellvarden

x	$f(x) = e^{\cos x}$
0.5000	2.4051
0.6000	2.2826
0.8000	2.0071
0.9000	1.8619
0.9500	1.7890
0.9900	1.7310
0.9990	1.7180
0.9998	1.7168
0.9999	1.7167
1.0000	1.7165
1.0001	1.7164
1.0002	1.7162
1.0010	1.7151
1.0100	1.7021
1.0500	1.6447
1.1000	1.5740
1.2000	1.4367
1.4000	1.1853
1.5000	1.0733

$f'(x) = -\sin x\, e^{\cos x}$
$\Rightarrow \quad f'(1) = -1.444407$

Derivataskattningar

h	$d(1,h)$	$D(1,h)$	$d - f'(1)$	$D - f'(1)$
0.5000	-1.2864	-1.3318	0.1580	0.1126
0.4000	-1.3280	-1.3716	0.1164	0.0728
0.2000	-1.3990	-1.4260	0.0454	0.0184
0.1000	-1.4250	-1.4395	0.0194	0.0049
0.0500	-1.4360	-1.4430	0.0084	0.0014
0.0100	-1.4400	-1.4450	0.0044	-0.0006
0.0010	-1.4000	-1.4500	0.0444	-0.0056
0.0002	-1.5000	-1.5000	-0.0556	-0.0556
0.0001	-1.0000	-1.5000	0.4444	-0.0556

Richardsonextrapolation (minskar E_{trunk})

h	$d(1,h)$	Δ	$\hat{d} = d + \Delta$	Δ	$\hat{\hat{d}} = \hat{d} + \frac{\Delta}{3}$
0.40	-1.3280				
0.20	-1.3991	-0.0711	-1.4702		
0.10	-1.4256	-0.0265	-1.4521	+0.0181	1.4461
0.05	-1.4360	-0.0104	-1.4464	+0.0057	1.4445

h	$D(1,h)$	Δ	$\hat{D} = D + \frac{\Delta}{3}$	Δ
0.40	-1.3716			
0.20	-1.4260	-0.0544	-1.4441	
0.10	-1.4400	-0.0140	-1.4447	-0.0006
0.05	-1.4430	-0.0030	-1.4440	+0.0007