$$e^x - \sin(x) = 2$$

Intervallhalveringsmetoden, GKN sid 73

$$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = e^x - \sin(x) - 2$$

```
                           Roten finns
 x           f(x)          i intervallet       Skrivs          Intervallangd
-----------------------------------------------------------------------------
1.0        -0.1232
1.4          1.0698        1.0 , 1.4         1.2 ± 0.2           0.4
1.2          0.3881        1.0 , 1.2         1.1 ± 0.1           0.2
1.1          0.1130        1.0 , 1.1         1.05 ± 0.05         0.1
1.05        -0.0098        1.05, 1.1         1.075 ± 0.025       0.05
1.075        0.0504        1.05, 1.075       1.062 ± 0.013       0.025    (0.026)
1.0625       0.0200        1.05, 1.0625      1.0562 ± 0.0063     0.0125   (0.0126)
1.05625      0.0051        1.05, 1.05625     1.0531 ± 0.0032     0.00625  (0.0064)
```

Sekantmetoden, GKM sid 79

$$x_{n+1} = x_n - t_n, \qquad t_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

$$f(x) = e^x - \sin(x) - 2$$

n	x_n	$f(x_n)$	t_n	$f(x_n)$	t_n	$t_n/(t_{n-1}t_{n-2})$
0	1.0000	-0.1232		$-1.2319\cdot 10^{-1}$		
1	1.4000	1.0698	0.3587	$1.0698\cdot 10^{0}$	$3.5869\cdot 10^{-1}$	
2	1.0413	-0.0302	-0.0098	$-3.0150\cdot 10^{-2}$	$-9.8324\cdot 10^{-3}$	
3	1.0511	-0.0071	-0.0030	$-7.0828\cdot 10^{-3}$	$-3.1091\cdot 10^{-3}$	0.86
4	1.0542	-0.0001	0.0001	$7.2191\cdot 10^{-5}$	$3.0461\cdot 10^{-5}$	1.03
5	1.0541	-0.0000	0.0000	$-1.7004\cdot 10^{-7}$	$-7.1578\cdot 10^{-8}$	0.78
6	1.0541					

```
disp('Sekantmetoden');
x0=1; x1=1.4;
disp('x0 x1 f0 f1 t');
while abs(x1-x0)>5e-5;
   f0=exp(x0)-2-sin(x0);
   f1=exp(x1)-2-sin(x1);
   t=f1*(x1-x0)/(f1-f0);
   disp([x0 x1 f0 f1 t])
   x0=x1; x1=x1-t;
end;
rot=x1
```

```
disp('Sekantmetoden');
x0=1; x1=1.4;
f0=exp(x0)-2-sin(x0);
disp('x  f  korr')
disp([x0 f0])
while abs(x1-x0)>5e-5;
   f1=exp(x1)-2-sin(x1);
   t=f1*(x1-x0)/(f1-f0);
   disp([x1 f1 t])
   x0=x1; f0=f1; x1=x1-t;
end;
rot=x1
```

```
disp('Sekantmetoden');
x0=1; x1=1.4;
f0=exp(x0)-2-sin(x0);
g0=1; g1=1;
disp('x  f  korr  konv')
disp([x0 f0])
while abs(x1-x0)>5e-5;
   f1=exp(x1)-2-sin(x1);
   t=f1*(x1-x0)/(f1-f0);
   k=t/(g1*g0);
   disp([x1 f1 t k])
   x0=x1; f0=f1; x1=x1-t;
   g0=g1; g1=t;
end;
rot=x1
```

Newton-Raphsons metod, GKN sid 74

$$x_{n+1} = x_n - t_n, \qquad t_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$e^x - \sin(x) - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = e^x - \sin(x) - 2, \quad f'(x) = e^x - \cos(x)$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	t_n	t_n	$K = t_n/t_{n-1}^2$
0	1.0000	-0.1232	2.1780	-0.0566	$-5.66 \cdot 10^{-2}$	
1	1.0566	0.0058	2.3846	0.0024	$2.43 \cdot 10^{-3}$	0.76
2	1.0541	-0.0000	2.3755	0.0000	$4.65 \cdot 10^{-6}$	0.79
3	1.0541					

```
disp('Newton-Raphsons metod')
x=1;
t=1; g=1;
format short e
disp('  x     f(x)    fprim(x)   korr    kvad    linj')
while abs(t)>5e-5;
  f=exp(x)-2-sin(x);
  fp=exp(x)-cos(x);
  t=f/fp;
  kvad=t/g^2; linj=t/g;
  disp([x f fp t kvad linj]);
  x=x-t;
  g=t;
end;
rot=x
```

Varför det inte alltid räcker med fixt antal decimaler

$$f(x) = e^{-0.001x} - 0.99$$

$$f'(x) = -0.001e^{-0.001x}$$

Ofta ser man räkningar med fixt antal **decimaler**. Här ett exempel med fyra decimaler:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	t_n
0	1.0000	0.0090	-0.0010	-9.0000
1	10.0000	0.0000	-0.0010	0.0000
2	10.0000			

Ingen av de fyra decimalerna ändrar sig längre men vi har inte ens 2 korrekta decimaler i sista värdet!

Samma exempel igen men nu räknat med minst 5 **siffror** överallt, inte 4 decimaler:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	t_n	$K = t_n/t_{n-1}^2$
0	1.0000	$9.0005 \cdot 10^{-3}$	$-9.9900 \cdot 10^{-4}$	$-9.0095 \cdot 10^{0}$	
1	10.0095	$4.0424 \cdot 10^{-5}$	$-9.9004 \cdot 10^{-4}$	$-4.0830 \cdot 10^{-2}$	$-5.0 \cdot 10^{-4}$
2	10.0503	$8.2524 \cdot 10^{-10}$	$-9.9000 \cdot 10^{-4}$	$-8.3357 \cdot 10^{-7}$	$-5.0 \cdot 10^{-4}$
3	10.0503				

10.05 är ett korrekt svar ty rätta värdet på roten är $x = \frac{\ln 0.99}{-0.001} \approx 10.05033585$

Newton-Raphson med deriveringsfel

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \sin(x) - 2 \qquad f'(x) = \mathrm{e}^x + \cos(x) \quad \text{Felderiverat!!!}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	t_n	$K = t_n/t_{n-1}^2$	t_n/t_{n-1}
0	1.0000	-1.2319·10^{-1}	3.2586	-3.7805·10^{-2}		
1	1.0378	-3.8278·10^{-2}	3.3311	-1.1491·10^{-2}	-8.0·10^{0}	0.30
2	1.0493	-1.1433·10^{-2}	3.3538	-3.4091·10^{-3}	-2.6·10^{1}	0.30
3	1.0527	-3.3750·10^{-3}	3.3606	-1.0043·10^{-3}	-8.6·10^{1}	0.29
4	1.0537	-9.9282·10^{-4}	3.3626	-2.9525·10^{-4}	-2.9·10^{2}	0.29
5	1.0540	-2.9175·10^{-4}	3.3632	-8.6748·10^{-5}	-9.9·10^{2}	0.29
5	1.0541	-8.5709·10^{-5}	3.3634	-2.5483·10^{-5}	-3.4·10^{3}	0.29
6	1.0541					

Slutsats: det **kan** bli rätt svar även om man deriverat fel, men:

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \sin(x) - 2 \qquad f'(x) = \mathrm{e}^x - \cos(x) + 200 \quad \text{Felderiverat!!!}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	t_n	$K = t_n/t_{n-1}^2$	t_n/t_{n-1}
0	1.0000	-0.1232	202.1780	-6.0931·10^{-4}		
1	1.0006	-0.1219	202.1801	-6.0274·10^{-4}	-1.6235·10^{3}	9.8921·10^{-1}
2	1.0012	-0.1205	202.1823	-5.9623·10^{-4}	-1.6412·10^{3}	9.8920·10^{-1}
$\vdots$						
217	1.0498	-0.0103	202.3593	-5.0800·10^{-5}	-1.9229·10^{4}	9.8834·10^{-1}
218	1.0498	-0.0102	202.3595	-5.0207·10^{-5}	-1.9456·10^{4}	9.8834·10^{-1}
219	1.0499	-0.0100	202.3597	-4.9622·10^{-5}	-1.9685·10^{4}	9.8834·10^{-1}
220	1.0499					

Slutsats: det **kan** bli fel svar även om man bara deriverat fel.

Newton-Raphson med funktionsfel

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \sin(x^2) - 2$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - \cos(x)$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	t_n	$K = t_n/t_{n-1}^2$	t_n/t_{n-1}
0	1.0000	-1.2319·10^{-1}	2.1780	-5.6561·10^{-2}		
1	1.0566	-2.2029·10^{-2}	2.3846	-9.2382·10^{-3}	-2.89	0.16
2	1.0658	-3.7668·10^{-3}	2.4194	-1.5570·10^{-3}	-18.2	0.17
3	1.0674	-6.3742·10^{-4}	2.4252	-2.6283·10^{-4}	-108.4	0.17
4	1.0676	-1.0766·10^{-4}	2.4262	-4.4375·10^{-5}	-642.4	0.17
5	1.0677	-1.8180·10^{-5}	2.4264	-7.4924·10^{-6}	-3805	0.17
6	1.0677					

Kommentar: Det blir (nästan) alltid fel svar om man programmerar fel funktion.

Slutsats: Det blir ofta fel svar om man programmerar fel. Bara när man har tur blir det ett orimligt svar eller inget svar alls. Kolla konvergensen så minimeras risken för att man accepterar fel värde!

Tillägg om Newton-Raphsons metod

Det kan bli fel svar även om bara derivatan är fel: Ekvationen $\ln x - 8 = 0$ har en rot nära 2980. Om man i Newton-Raphsons metod sätter $f(x) = \ln x - 8$, $f'(x) = 1/x$ ger startvärdet 2980 och sedan itererar tills korrektionerna är mindre än 0.001 så stannar iterationerna på 2980.958 (efter två varv) men om man råkar derivera fel, $f'(x) = 1/\ln x$, så med samma startvärde och stopp-kriterium som ovan så stannar programmet (efter 353 iterationer) på 2980.587 Rätta svaret är $x = e^8 = 2980.958$ Ser man bara siffrorna i roten är det väldigt svårt att inse att 2908.587 är fel svar. Det verkar ju helt rimligt och tycks stämma om man tittar på en graf.

Det kan bli fel svar även om bara startvärdet är fel: Funktionen $f(x) = e^x - 2 - \sin x^2$ har derivatan $f'(x) = e^x - 2x\cos x^2$ Ger man startvärdet $x = -1.295$ och itererar tills korrektionerna är mindre än 0.0005 så stannar iterationerna på -3794.287 (efter två varv). Med startvärdet $x = -1.9$ så stannar iterationerna på det rätta värdet 1.068 (efter 16 varv). Konvergens trots att startvärdet låg längre från roten.

Ännu ett par exempel på att det inte räcker med regeln att iterera tills de önskade siffrorna är lika. Kolla konvergensen så undviker du att acceptera ett felaktigt värde.

Newton-Raphsons modifierade metod, GKN sid 87

$$f(x) = e^x - \sin(x) - 2 \qquad f'(x) \approx 2$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	t_n	t_n	$K = t_n/t_{n-1}^2$	t_n/t_{n-1}
0	1.0000	-0.1232	2.0	-0.0616	$-6.16\cdot10^{-2}$		
1	1.0616	0.0178	2.0	0.0089	$8.92\cdot10^{-3}$	2.35	-0.15
2	1.0527	-0.0035	2.0	-0.0017	$-1.75\cdot10^{-3}$	-21.7	-0.19
3	1.0544	-0.0006	2.0	0.0003	$3.22\cdot10^{-4}$	108	-0.19
4	1.0541	-0.0001	2.0	-0.0001	$-6.05\cdot10^{-5}$	-584	-0.19
5	1.0541	-0.0000	2.0	0.0000	$1.14\cdot10^{-5}$	3102	-0.19
6	1.0541						

Trunkeringsfel i iterativt rot-finnande

Vi itererar x_n i sekantmetoden och Newton-Raphson tills $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$. Hur kan vi då tro att roten ligger i intervallet $[x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon]$?

Iterationsformeln är $x_{n+1} = x_n - t_n$ och vi vet att $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Om vi då stannar i $n = N$ så måste felet vara

$$E_{\text{trunk}} = |x_N - x| = \left|\sum_{n=N}^{\infty} t_n\right| \le \sum_{n=N}^{\infty} |t_n|$$

Om varje $|t_n|$ avtar snällt, tex $|t_n| \le \frac{1}{2}|t_{n-1}|$ så blir $\sum_{n=N}^{\infty} |t_n| \le |t_N|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots\right) = 2|t_N| \le |t_{N-1}|$. Detta är just formeln för att skatta trunkeringsfelet:

$$|x_N - x| \le |x_N - x_{N-1}|$$

Fixpunktsmetoden, GKN sid 82

$$f(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{n+1} = G(x_n)$$

$$e^x - 2 - \sin(x) = 0$$

$$e^x = 2 + \sin(x) \qquad\qquad \sin(x) = e^x - 2$$

$$x = \ln(2 + \sin(x)) \qquad\qquad x = \arcsin(e^x - 2)$$

$$x_{n+1} = \ln(2 + \sin(x_n)) \qquad\qquad x_{n+1} = \arcsin(e^{x_n} - 2)$$

$x_{n+1} = G(x_n) = \ln(2 + \sin(x_n))$			
n	x_n	$x_n - x_{n-1}$	$\frac{(x_n - x_{n-1})}{(x_{n-1} - x_{n-2})}$
0	1.0000		
1	1.0443	0.0433	
2	1.0524	0.0081	0.18
3	1.0538	0.0014	0.17
4	1.0541	0.0003	0.17
5	1.0541		

$x_{n+1} = G(x_n) = \arcsin(e^{x_n} - 2)$			
n	x_n	$x_n - x_{n-1}$	$\frac{(x_n - x_{n-1})}{(x_{n-1} - x_{n-2})}$
0	1.0000		
1	0.8013	-0.1987	
2	0.2305	-0.5708	2.9
3	-0.8341	-1.0675	1.9
4	Error		

Fixpunktsmetoden $\quad x_{n+1} = G(x_n)$

konvergerar om $\quad |G'(\text{roten})| < 1$

konvergerar snabbt om $\quad |G'(\text{roten})| \ll 1$

ty $\quad \dfrac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} \approx |G'(\text{roten})|$

$$G(x) = \ln(2 + \sin(x)) \quad \Longrightarrow \quad G'(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)} \quad \Longrightarrow \quad G'(1.0541) = \frac{\cos(1.0541)}{2 + \sin(1.0541)} \approx 0.17$$

$$G(x) = \arcsin(e^x - 2) \quad \Longrightarrow \quad G'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x - 2)^2}} \quad \Longrightarrow \quad G'(1.0541) = \frac{e^{1.0541}}{\sqrt{1 - (e^{1.0541} - 2)^2}} \approx 5.81 \gg 1$$