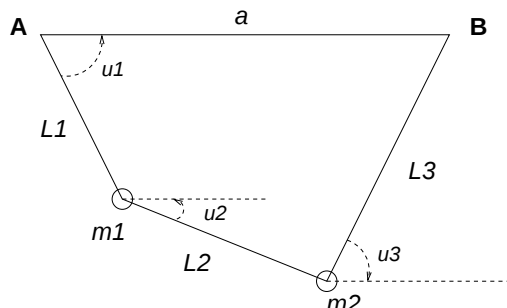




Ett olinjärt ekvationssystem: Vikter på en lina (upg 1-5) numerisk integration (upg 6-9) och vektorer (upg10)

Efter den här laborationen skall du kunna lösa icke-linjära ekvationssystem och integraler.
Läsanvisning: GNM kap 4.3 (upg 1-4) och 5 (upg 6-9), PEng (upg10).



Två kulor sitter fast på ett snöre som hänger mellan två punkter, A och B. Linjen AB mellan punkterna är horisontell och avståndet mellan punkterna är a . Kulornas massa är m_1 resp m_2 . Kulorna delar upp snöret i tre delar med längderna L_1 , L_2 och L_3 . Uppgiften är att räkna ut vilka vinklar de tre snörena bildar med horisontalplanet samt att rita upp snörets form i en graf. Beteckna de tre sökta vinklarna u_1 , u_2 och u_3 . De uppfyller villkoret $\pi/2 > u_1 \geq u_2 \geq u_3 > -\pi/2$ (se figuren). Observera att vridning medurs ger en positiv vinkel och vridning moturs en negativ. Vinkeln mäts från horisontalplanet. Vid jämvikt gäller följande samband:

$$m_2 \tan u_1 - (m_1 + m_2) \tan u_2 + m_1 \tan u_3 = 0$$

Dessutom får man två samband från geometriska betraktelser (totala förflyttningen i x-led är a (och totala förflyttningen i y-led är 0). Ställ upp de två saknade ekvationerna. De tre sambanden utgör tillsammans ett *icke-linjärt ekvationssystem* för de tre vinklarna u_1 , u_2 och u_3 .

Problemet skall nu lösas med Newtons metod:

1. Formulera och ställ upp de två saknade ekvationerna.
2. Formulera (med papper och penna) ekvationssystemet på formen $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ och beräkna analytiskt Jacobi-matrisen för detta system.
3. Ställ upp (med papper och penna) det linjära ekvationssystem som skall lösas i varje iteration.
4. Bestäm/gissa lämpliga startvärden för de tre vinklarna u_1 , u_2 och u_3 (givet parametervärdena nedan).
5. Skriv ett program i Matlab som löser problemet med Newtons metod för följande värden på parametrarna $a = 5.6$, $L_1 = 1.5$, $L_2 = 3.2$, $L_3 = 2.5$, $m_1 = 6.3$ samt $m_2 = 4.5$. Rita in snörets form i en graf. En dagboksfil ska visa vilka startgissningar du valt för de sökta vinklarna samt en tabell som visar hur iterationerna konvergerar mot lösningen. Har du kvadratisk konvergens?

6. Gör om uppgift 5 men med följande värden på parametrarna $a = 6.3$, $L_1 = 2.2$, $L_2 = 1.3$, $L_3 = 4.5$, $m_1 = 4.4$ samt $m_2 = 5.1$.

6. Beräkna följande integral

$$I = \int_{-3}^5 \sqrt{x+7} \, dx$$

(a) analytiskt.

Lös sedan integralen numeriskt med papper och penna och miniräknare med

(b) trapetsregeln och steglängderna $h = 8$, $h = 4$ och $h = 2$

(c) gör richardson-extrapolation på de tre trapetsregelvärdena ovan.

(d) Välj ett bra numeriskt skattat värde på integralen med felgräns. (Utgå från dina beräkningar i uppgift b och c ovan.)

Lös sedan integralen numeriskt med datorn och

(e) trapetsregeln, (valfria steglängder, minst 5 st (fler ger en mer lättolkad plott!))

(f) trapetsregeln följd av upprepad richardson-extrapolation.

(g) Undersök hur trunkeringsfelet, E_h , beror av steglängden, h , genom att plotta felet som funktion av steglängden. Använd gärna MATLABs kommando `loglog` för plottarna.

Uppskatta metodernas noggrannhetsordning, p , med hjälp av dessa plottar. För en methods noggrannhetsordning gäller

$$|E_h| = |I - I_{approx}(h)| \leq \text{konstant} \cdot h^p$$

där $I_{approx}(h)$ är det numeriskt uträknade integralvärdet med först bara trapetsregeln och sedan trapetsregeln följt av richardson-extrapolationen. Stämmer detta med vad som gäller för felet enligt formlerna i kursboken?

(h) Hur skattar man en felgräns om man inte har tillgång till det analytiska värdet som referensvärde? (Beskrivning söks, inget datorprogram behövs!)

7. Vi vill skatta integralen

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-\left(\frac{x-\pi}{0.02}\right)^2} dx$$

med MATLAB-program. Integralen kan skattas analytiskt med minst tio decimaler med värdet $I_{ref} = 0.02\sqrt{\pi}$. Använd detta värde som referensvärde. Börja skatta integralen över hela intervallet med MATLABs `quadl`. Sätt toleransen till 10^{-8} . Stämmer det med referensvärdet?

Lös sedan integralen med trapetsregeln. Börja med att dela intervallet i 20 delar. Hur mycket och varför skiljer sig integralvärdet från referensvärdet?

Halvera sedan steglängden i trapetsregeln tills dess att $|I_{ref} - I_{trap}| \leq 10^{-8}$. Hur många funktions-evalueringar har trapetsregeln gjort? Hur många funktionsevalueringar gjorde `quadl`? Vilken av metoderna har använt flest funktionsevalueringar? Varför?

(Tips: Om du gör anropet

`[I_quadl,fnceval]=quadl('fun_name',a,b,tol)` när du använder `quadl` så innehåller variabeln `fnceval` antalet funktionsevalueringar `quadl` har använt vid beräkningen av resultatet. För trapetsregeln kan du titta på steglängden, i hur många punkter har integranden beräknats?)

8. Byt nu ut övre gränsen i föregående uppgift från 2π till 6.

a) Hur mycket ändras integralvärdet, dvs referensvärdet? Skatta "för hand", en övre gräns för hur mycket integralvärdet maximalt kan ha ändrats.

b) Beräkna sedan integralen numeriskt med båda metoderna (dvs `quadl` och trapetsregeln), med ett trunkeringfel på högst 10^{-8} . Hur många funktionsevalueringar behövdes med respektive metod? Vilken metod föredrar du? Varför?

(Tips: Se till att ditt program beräknar rätt integralvärde)

9.

(a) Beräkna följande integral numeriskt med minst åtta säkra siffror. Redovisa alla steg du gör för att få fram svaret och vilken noggrannhet ditt svar har.

$$I_a = \int_0^{25} \frac{5}{(x^2/17 + \sqrt{x + 4x^3})} dx$$

(b) För att kunna skatta integralen

$$I_b = \int_0^{\infty} \frac{5}{(x^2/17 + \sqrt{x + 4x^3})} dx$$

numeriskt kan man ersätta övre integrationsgränsen med ett ändligt tal, B . Beräkna/skatta en lämplig övre gräns, B , så att man kan skatta integralen $I_b = \int_0^{\infty}$ med integralen $I_B = \int_0^B$ med minst tio säkra siffror. Skatta därefter integralen I_B med minst tio säkra siffror. Redovisa alla steg du gör för att få fram svaret och hur du kollar vilken noggrannhet ditt svar har.

10. Caesar-skiffer. Text kommer inom kort.

Hur många timmar ungefär har den här laborationen tagit?

En fråga på kursutvärderingen i slutet av kursen kommer att gälla tidsåtgång och laborationsomfång. Tänk redan nu igenom vad som är bra och vad som kan förbättras!

/--- $\mathcal{NC}$ ---/