

Kort förslag till lösning - 2013-02-22

P1a

$x = 1.3$ ligger mellan $x = 1$ och $x = 2$. Gör en linje mellan dessa värden.

Newtons ansats, $x_1 = 3$ och $x_2 = 6$. $y = c_1 + c_2(x - x_1)$.

$y_1 = c_1$ och $y_2 = c_1 + c_2(x_2 - x_1)$ ger $c_1 = 3$ och $c_2 = 3$ vilket ger $y(1.3) = c_1 + c_2(1.3 - x_1) = 3 + 3 \cdot 0.3 = 3.9$

P1b

Ökat gradtal. Lägg till en term i Newtons ansats:

$y = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2)$

Nästa närmaste punkt är $x_3 = 0, y_3 = 1$ vilket ger

$c_3 = (y_3 - c_1 - c_2(x_3 - x_1))/((x_3 - x_1)(x_3 - x_2)) = (1 - 3 - 3 \cdot (0 - 1))/((0 - 1) \cdot (0 - 2)) = 1/2$.

och för $x = 1.3$:

$c_3(1.3 - x_1)(1.3 - x_2) = -0.21/2 = -0.105$ vilket ger $y(1.3) = 3.9 - 0.105 = 3.795$

P1c

$y = kx + m$ ger

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

MKV löses med normalekvationerna $A^T A c = A^T b$. Vi får $A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ och $A^T b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ som ger $k = 2$ och $m = 1.5$. Därmed $y(1.3) = k \cdot 1.3 + m = 4.1$ 20.0pt

P1d

$y = c_1 x + c_2 x^2$ ger

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 \\ x_2 & x_2^2 \\ x_3 & x_3^2 \\ x_4 & x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

MKV löses med normalekvationerna $A^T A c = A^T b$. Vi får $A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$ och $A^T b = \begin{pmatrix} 15 \\ 27 \end{pmatrix}$ som jag löser som

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 15 \\ 8 & 18 & 27 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \times 4 \\ \times 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 24 & 32 & 60 \\ 24 & 54 & 81 \end{array} \right)$$

vilket ger $c_2 = (54 - 32)/(81 - 60) = 22/21$ och därmed $c_1 = (15 - 8c_2)/6$ och $y(1.3) = c_1 \cdot 1.3 + c_2 \cdot 1.3^2$

(Den som vill(!?) kan räkna ut uttrycken: $c_2 = 27/22$ och $y(1.3) \approx 3.2$).

P2a

$$I = \int_0^1 x^2 dx = [x^3/3] = 1/3$$

P2b 2 delintervall ger $h = 0.5$ och $I \approx 0.5(\frac{1}{2}f(0) + f(0.5) + \frac{1}{2}f(1)) = 0.5(0 + (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$

P2c 3 delintervall ger $h = \frac{1}{3}$ och $I \approx \frac{1}{3}(\frac{1}{2}f(0) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + \frac{1}{2}f(1)) = \frac{1}{3}(0 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{2}) = \frac{19}{54}$

P2d $\cos(x)$ på intervallet $0.1 \leq x \leq 0.6$ är en kurva som böjer nedåt. Alla sekanter kommer då att ligga under den riktiga kurvan. Trapetsregeln kommer att ge en underskattning av integralens värde.

P3a Systemet har 4 lösningar.

Det inses lättast genom att man skissar kurvorna för ekvationerna. Den första ekvationen kan skrivas som $y = (10 - x^2)/3$. Det är en parabel med en maxpunkt ("en sur mun"). Max ligger i $x = 0$ (då blir $y' = 0$) och $y = 10/3$. $y = 0$ för $x = \pm\sqrt{10}$.

Den andra ekvationen kan skrivas som $x = 4 - 2y^2$. Eftersom x och y har "bytt plats" blir det en liggande parabel. Det är också en parabel med en maxpunkt (dvs toppen åt höger eftersom x är funktionsvärdet). Max ligger i $y = 0$ (då blir $x' = -4y = 0$) och $x = 4$. $x = 0$ för $y = \pm\sqrt{2}$.

En snabb handskiss (med hjälp av ovanstående tre punkter per kurva) ger att rötterna ligger vid ca $x = 3, y = \pm 1$ och $x = -2, y = 2$ och den sista $x = -4, y = -2$. Det räcker att ange startvärden till en rot.

P3b

Newtons metod löser systemet $Jt = f$ i varje iteration, där

$$f = \begin{pmatrix} x^2 + 3y - 10 \\ x + 2y^2 - 4 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3 \\ 1 & 4y \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

P3c Med $x = x_0 = 3$ och $y = y_0 = 1$ fås

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \begin{pmatrix} 5/21 \\ 4/21 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/21 \\ 4/21 \end{pmatrix}$$

$$(\text{och om man gillar att räkna } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58/21 \\ 17/21 \end{pmatrix})$$

P3d Använd störningsräkning. Stör **en** parameter i taget!

Beräkna först ostörda x och y med högerledet $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Beräkna sedan störda $\tilde{x}$ och $\tilde{y}$ med högerledet $\begin{pmatrix} 10+1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Beräkna sedan störda $\hat{x}$ och $\hat{y}$ med högerledet $\begin{pmatrix} 10 \\ 4+1 \end{pmatrix}$.

Felgränsen i x skattas sedan som $E_x = |x - \tilde{x}| + |x - \hat{x}|$ och felgränsen i y skattas sedan som $E_y = |y - \tilde{y}| + |y - \hat{y}|$.

P4a Diffekvationerna är redan av ordning ett så diskretisera enligt $x_n = x_0 + i \cdot h$ och $y_n \approx y(x_n)$ och $z_n \approx z(x_n)$ så blir Eulers formler

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h & x_0 &= 1 \\y_{n+1} &= y_n + h(1 + x_n - z_n) & y_0 &= 2 \\z_{n+1} &= z_n + h(1 - x_n - y_n) & z_0 &= 3\end{aligned}$$

P4b Steglängden $h = 0.1$ innebär 2 steg.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + x_0 - z_0 \\ 1 - x_0 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 2.0 \\ 2.8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + x_1 - z_1 \\ 1 - x_1 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.01 \\ 2.59 \end{pmatrix}$$

så $y(1.2) = 2.01$.

P4c

```
x=1; y=2; z=3;
n=200;
h=4/n;
xx=x; yy=y; zz=z;
for i=1:n;
    yp=1+x-y;
    zp=[1-x-y];
    x=x+h; y=y+h*yp; z=z+h*zp;
    xx=[xx;x]; yy=[yy;y]; zz=[zz;z];
end;
zslut=z
yprim=1+xx-yy;
plot(xx,yprim)
```