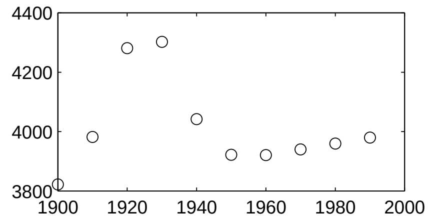
OH till Föreläsning 4, Numme T1, 120914

GNM Kap 4-4.4A / GKN Kap 4.1A,(D),E Interpolation

Läsa mellan raderna

x	y
1900	3822
1910	3982
1920	4281
1930	4302
1940	4042
1950	3922
1960	3921
1970	3940
1980	3960
1990	3980



Allmän polynom-interpolation

Välj ett lämpligt gradtal till polynomet och välj ut nödvändigt antal tabellvärden (eller tag alla tabellvärdena och låt gradtalet bestämmas av det). Bestäm sedan polynomets koefficienter genom att låta polynomet gå igenom de utvalda tabellvärdena, $p(x_i) = y_i$.

Linjär interpolation, GNM sid (5)2 - GKN sid 134ff

Sökt värde är $y(1925)$. Linjär interpolation (approximation med en rät linje) kräver två givna punkter. 1925 ligger mellan 1920 och 1930:

$$y = k\,x + m \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} y_1 = k\,x_1 + m \\ y_2 = k\,x_2 + m \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} 4281 = k\,1920 + m \\ 4302 = k\,1930 + m \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} k = 2.1 \\ m = 249 \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} y(1925) = k\,1925 + m = \\ \quad = 2.1 \cdot 1925 + 249 = \\ \quad = 4042.5 + 249 = 4291.5 \end{array}$$

Kvadratisk interpolation, GNM sid (5)3

Sökt värde är $y(1925)$. Kvadratisk interpolation (approximation med ett andragradspolynom) kräver tre givna punkter eftersom ett andragradspolynom har tre koefficienter. 1925 ligger mellan 1920 och 1930, jag väljer $x_1 = 1920,\ x_2 = 1930$ och $x_3 = 1940$:

$$y = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} y_1 = c_1 + c_2\,x_1 + c_3\,x_1^2 \\ y_2 = c_1 + c_2\,x_2 + c_3\,x_2^2 \\ y_3 = c_1 + c_2\,x_3 + c_3\,x_3^2 \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} 4281 = c_1 + c_2\,1920 + c_3\,1920^2 \\ 4302 = c_1 + c_2\,1930 + c_3\,1930^2 \\ 4042 = c_1 + c_2\,1940 + c_3\,1940^2 \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} c_1 = -5206119 \\ c_2 = 5411.35 \\ c_3 = -1.405 \end{array}$$

$$y(1925) = c_1 + c_2 \cdot 1925 + c_3 \cdot 1925^2 = -5206119 + 5411.35 \cdot 1925 + (-1.405) \cdot 1925^2 =$$
$$= -5206119 + 10416848.75 - 5206403.125 = 4326.625$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1920 & 1920^2 \\ 1 & 1930 & 1930^2 \\ 1 & 1940 & 1940^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1920 & 3686400 \\ 1 & 1930 & 3724900 \\ 1 & 1940 & 3763600 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \kappa\,(A) = 2.9 \cdot 10^{11}$$

1940 ligger lika långt från 1925 som 1910. Hade jag valt $x_1 = 1920,\ x_2 = 1930$ och $x_3 = 1910$ hade jag fått $c_1 = -5150535,\ c_2 = 5353.6$ och $c_3 = -1.39$ vilket ger $y(1925) = c_1 + c_2 \cdot 1925 + c_3 \cdot 1925^2 =$
$= -5150535 + 5353.6 \cdot 1925 + (-1.39) \cdot 1925^2 = -5150535 + 10305680 - 5150818.75 = 4326.25$
Nya koefficienter och ett lite annat svar!

Kvadratisk interpolation med centrering

Med $x_1 = 1920,\ x_2 = 1930$ och $x_3 = 1940$ kan jag centrera kring medelvärdet $m = 1930$.

$$y = c_1 + c_2\ (x-m) + c_3\ (x-m)^2 \Rightarrow \begin{array}{l} 4281 = c_1 + c_2\ (1920-1930) + c_3\ (1920-1930)^2 \\ 4302 = c_1 + c_2\ (1930-1930) + c_3\ (1930-1930)^2 \\ 4042 = c_1 + c_2\ (1940-1930) + c_3\ (1940-1930)^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 4302 \\ c_2 = -11.95 \\ c_3 = -1.405 \end{array}$$

$$y(1925) = c_1 + c_2 \cdot (1925-1930) + c_3 \cdot (1925-1930)^2 =$$

$$= 4302 + (-11.95) \cdot (1925-1930) + (-1.405) \cdot (1925-1930)^2 = 4302 + 59.75 - 35.125 = 4326.625$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1920-1930 & (1920-1930)^2 \\ 1 & 1930-1930 & (1930-1930)^2 \\ 1 & 1940-1930 & (1940-1930)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 100 \end{pmatrix} \Longrightarrow \kappa(A) = 1.4 \cdot 10^2$$

Hade jag valt $x_1 = 1920,\ x_2 = 1930,\ x_3 = 1910$ och $m = 1920$ hade jag fått $c_1 = 4281,\ c_2 = 16$ och $c_3 = -1.39$ vilket ger $y(1925) = c_1 + c_2 \cdot (1925-1920) + c_3 \cdot (1925-1920)^2 = 4281 + 16 \cdot (1925-1920) + (-1.39) \cdot (1925-1920)^2 = 4281 + 80 - 34.75 = 4326.25$
Nya koefficienter (förutom högstagradskoefficienten) men samma svar! (Numreringen av x_i spelar här ingen roll. Vi hade fått exakt samma koefficienter om vi hade tagit tex $x_1 = 1910,\ x_2 = 1920$ och $x_3 = 1930$).

Oavsett vilka punkter jag valt får jag mycket ”snällare” siffror vid centrerad än naiv ansats!

Kvadratisk interpolation med Newtons ansats, GNM sid (5)4 - GKN sid135

Ett alternativ till centrering är Newtons fiffiga ansats. Koefficienterna bestäms som vanligt med $p(x_i) = y_i$. Med $x_1 = 1920,\ x_2 = 1930$ och $x_3 = 1940$ (och $y_1 = 4281,\ y_2 = 4302$ och $y_3 = 4042$) får jag

$$p(x) = c_1 + c_2\ (x-x_1) + c_3\ (x-x_1)\ (x-x_2) \Rightarrow p(x) = c_1 + c_2\ (x-1920) + c_3\ (x-1920)\ (x-1930) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 4281 = c_1 + c_2\ (1920-1920) + c_3\ (1920-1920)\ (1920-1930) = c_1 \\ 4302 = c_1 + c_2\ (1930-1920) + c_3\ (1930-1920)\ (1930-1930) = c_1 + 10\,c_2 \\ 4042 = c_1 + c_2\ (1940-1920) + c_3\ (1940-1920)\ (1940-1930) = c_1 + 20\,c_2 + 200\,c_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 4281 \\ c_2 = 2.1 \\ c_3 = -1.405 \end{array}$$

$$\begin{aligned} y(1925) &= c_1 + c_2 \cdot (1925-1920) + c_3 \cdot (1925-1920)\ (1925-1930) = \\ &= 4281 + 2.1 \cdot 5 + (-1.405) \cdot 5 \cdot (-5) = 4281 + 10.5 + 35.125 = 4326.625 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 1 & 20 & 200 \end{pmatrix} \Longrightarrow \kappa(A) = 2.0 \cdot 10^2$$

$*$ Lättlöst ekvationssystem
$*$ Lågt konditionstal
$*$ Återanvändbara koefficienter

Hade jag valt $x_1 = 1920,\ x_2 = 1930,\ x_3 = 1910$ och Newtons ansats hade jag fått

$$p(x) = c_1 + c_2\ (x-x_1) + c_3\ (x-x_1)\ (x-x_2) \Rightarrow p(x) = c_1 + c_2\ (x-1920) + c_3\ (x-1920)\ (x-1930) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 4281 = c_1 + c_2\ (1920-1920) + c_3\ (1920-1920)\ (1920-1930) = c_1 \\ 4302 = c_1 + c_2\ (1930-1920) + c_3\ (1930-1920)\ (1930-1930) = c_1 + 10\,c_2 \\ 3982 = c_1 + c_2\ (1910-1920) + c_3\ (1910-1920)\ (1910-1930) = c_1 - 10\,c_2 + 200\,c_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 4281 \\ c_2 = 2.1 \\ c_3 = -1.39 \end{array}$$

$$\begin{aligned} y(1925) &= c_1 + c_2 \cdot (1925-1920) + c_3 \cdot (1925-1920)\ (1925-1930) = \\ &= 4281 + 2.1 \cdot 5 + (-1.39) \cdot 5 \cdot (-5) = 4281 + 10.5 + 34.75 = 4326.25 \end{aligned}$$

Eftersom de två första punkterna i ansatsen var desamma blev ekvationerna likadana och koefficienterna därmed oförändrade. Från och med den nya punkten får man nya koefficienter. Dock är högstagradskoefficienten förstås densamma som vid naiva och centrerade ansatsen och vi känner igen svaret. (Numreringen av x_i påverkar koefficienternas värden men inte polynomets!)

Hur bra är resultatet?, GNM sid (5)6-7,16-17 - GKN sid 136

$$
\begin{aligned}
E_{trunk} &= |\text{Skillnaden mellan beräknat polynomvärde och rätta värdet} \\
&\approx \text{Skillnaden mellan beräknat värde och det man får om man ökar gradtalet med ett.} \\
&\approx \text{första försummade termen i Newtons ansats. (Inte vid naiv och centrerad ansats!).} \\
&\quad \text{Specialfall : vid linjär IP i ekvidistant tabell blir } E_{trunk} \approx \max|\Delta^2 y|/8 \\
&\quad \qquad \text{vid kvadratisk IP i ekvidistant tabell blir } E_{trunk} \approx \max|\Delta^3 y|/15 \\
E_{tab} &\geq E_y, \text{ dvs felgränsen i de givna tabellvärdena.} \\
&\quad \text{Exempel : vid linjär IP blir } E_{tab} = E_y, \text{ vid kvadratisk IP blir } E_{tab} = 5/4\, E_y
\end{aligned}
$$

Vårt exempel: Med linjär IP fick vi $y(1925) = 4291.5$ och med kvadratisk IP fick vi $y(1925) = 4326.625$. Trunkeringsfelets gräns vid linjär IP skattas då till $E_{trunk} = |4291.5 - 4326.625| = 35.125$ och osäkerheten pga fortplantade fel i indata till $E_{tab} = 1 \cdot E_y = 0.5$. Gränsen för beräkningsfelet är svårskattad men klart mindre om vi använt Newtons eller centrerad ansats än den naiva.

Eftersom trunkeringsfelets gräns är mycket större än tabelleringsfelets lönar det sig att öka gradtalet hos interpolationspolynomet.

Runges fenomen, GNM sid (5)9 - GKN sid 139

Polynom av hög grad, speciellt vid ekvidistanta data, kan få kraftiga svängningar i ytterområdena.

Styckvis interpolation, GKN sid 140

x	y	k
x_1	y_1	k_1
x_2	y_2	k_2
x_3	y_3	k_3

Olika polynom mellan varje punktpar. Ett tredjegradspolynom har fyra koefficienter:

$$p_1(x) = c_1 + c_2\, x + c_3\, x^2 + c_4\, x^3, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad p_1(x_1) = y_1 \quad p_1(x_2) = y_2 \quad p_1'(x_1) = k_1 \quad p_1'(x_2) = k_2$$

$$p_2(x) = b_1 + b_2\, x + b_3\, x^2 + b_4\, x^3, \quad x_2 \leq x \leq x_3 \quad \Longleftrightarrow \quad p_2(x_2) = y_2 \quad p_2(x_3) = y_3 \quad p_2'(x_2) = k_2 \quad p_2'(x_3) = k_3$$

Hermites interpolationsformel, GNM sid (5)10 & (5)20 - GKN sid 141 & 171!

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
h_i = x_{i+1} - x_i & P(x) = y_i + c_i\,(x - x_i) + \\
c_i = (y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i) & \quad + (x - x_i)\,(x - x_{i+1})\,((k_{i+1} - c_i)\,(x - x_i) + (k_i - c_i)\,(x - x_{i+1}))\,/h_i^2
\end{array}
}
$$

x	y	k
3	4	1
5	2	-1
6	3	2.5

$$
\begin{array}{llll}
\text{Önskas} & x_i = 3 & x_{i+1} = 5 & \\
y(4.2) & y_i = 4 & y_{i+1} = 2 & \Longrightarrow \quad c_i = (2-4)/(5-3) = -1 \\
\text{blir det} & k_i = 1 & k_{i+1} = -1 &
\end{array}
$$

Skattningen blir $y\,(x = 4.2)$:

$$P(4.2) = 4 + (-1)\cdot(4.2-3) + (4.2-3)(4.2-5)(((-1)-(-1))(4.2-3) + (1-(-1))(4.2-5))/(2^2) = 3.184$$

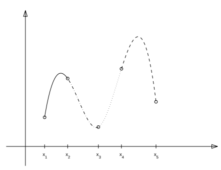
Vill man skatta $y\,(x = 3.2)$:

$$P(3.2) = 4 + (-1)\cdot(3.2-3) + (3.2-3)(3.2-5)(((-1)-(-1))(3.2-3) + (1-(-1))(3.2-5))/(2^2) = 4.124$$

Vill man skatta $y(5.2)$ måste man beräkna nya värden på h och c eftersom $x = 5.2$ ligger i nästa intervall.

Styckvis interpolation - splines, GNM sid (5)12 - GKN sid 142

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4
x_5	y_5



$$\begin{cases} p_1(x) = a_1 + a_2\,x + a_3\,x^2 + a_4\,x^3 \\ p_2(x) = b_1 + b_2\,x + b_3\,x^2 + b_4\,x^3 \\ p_3(x) = c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2 + c_4\,x^3 \\ p_4(x) = d_1 + d_2\,x + d_3\,x^2 + d_4\,x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{16 sökta} \\ \text{koefficienter!}\end{array}$$

Givna värden på funktionen i mätpunkterna och kontinuerlig första- och andraderivata ger villkoren

$$\begin{array}{ll} p_1(x_1) = y_1 & p_3(x_3) = y_3 \\ p_1(x_2) = y_2 & p_3(x_4) = y_4 \\ p_2(x_2) = y_2 & p_4(x_4) = y_4 \\ p_2(x_3) = y_3 & p_4(x_5) = y_5 \end{array} \quad \begin{array}{ll} p_1'(x_2) = p_2'(x_2) & p_1''(x_2) = p_2''(x_2) \\ p_2'(x_3) = p_3'(x_3) & p_2''(x_3) = p_3''(x_3) \\ p_3'(x_4) = p_4'(x_4) & p_3''(x_4) = p_4''(x_4) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{14 villkor} \\ \text{Fattas 2 st!}\end{array}$$

De två felande villkoren får (måste) vi alltid välja själva. I *naturliga (kubiska) splines* gör man valet $p'' = 0$ i ytterkanterna, dvs i exemplet ovan skulle de två extra villkoren bli $p_1''(x_1) = 0$ och $p_4''(x_5) = 0$.

I praktiken

Lös ekvationssystemet nedan för k-värdena och använd sedan dessa k-värden i Hermites interpolationsformel.

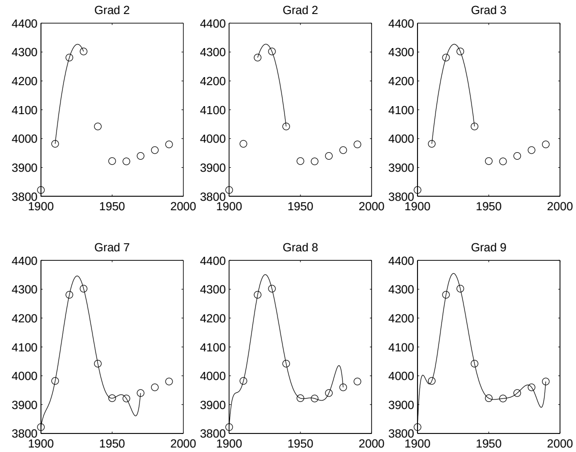
$$\begin{pmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3+h_2) & h_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

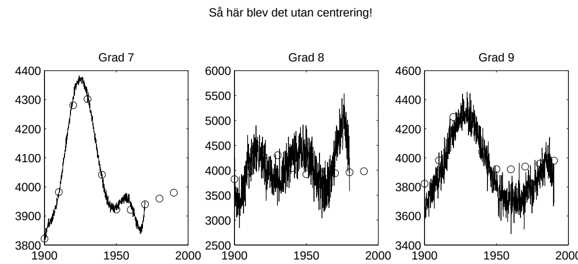
$$\text{där } b_i = \begin{cases} \Delta y_1 & \text{om } i = 1 \\ \frac{h_{i-1}}{h_i}\Delta y_i + \frac{h_i}{h_{i-1}}\Delta y_{i-1} & \text{om } i = 2, 3, \ldots, n-1 \\ \Delta y_{n-1} & \text{om } i = n \end{cases}$$

Styckvis interpolation - nästan splines?

Om man vill slippa lösa ekvationssystemet ovan kan man skatta derivatorna med följande formler där N är antalet givna punkter. (Detta betyder dock att andraderivatan inte blir kontinuerlig.)

$$k_1 = 2\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) - \left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right) \quad k_i = \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}\right) \; i = 2, \ldots, N-1 \quad k_N = 2\left(\frac{y_N - y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}\right) - \left(\frac{y_N - y_{N-2}}{x_N - x_{N-2}}\right)$$





Hermites gamla interpolationsformel, GNM sid (5)10

(Används ibland i EXS och extentor)

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$
$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$
$$g_i = h_i\, k_i - \Delta y_i$$
$$c_i = 2\Delta y_i - h_i\,(k_i + k_{i+1})$$

Så för valfritt $t \in [0, 1]$ kan vi beräkna

$$x = x_i + t h_i$$
$$y = y_i + t\Delta y_i + t\,(1-t)\,g_i + t^2\,(1-t)\,c_i$$

x	y	k
3	4	1
5	2	-1
6	3	2.5

Önskas $y(4.2)$ blir det

$$h = 5 - 3 = 2$$
$$\Delta y = 2 - 4 = -2$$
$$g = 2 \cdot 1 - (-2) = 4$$
$$c = 2 \cdot (-2) - 2\,(1 + (-1)) = -4$$

Vill man skatta $y\,(x = 4.2)$:

$$t = (x - x_i)/h_i = (4.2 - 3)/2 = 0.6$$
$$y = 4 + 0.6 \cdot (-2) + 0.6 \cdot (1 - 0.6) \cdot 4 + \\ + 0.6^2 \cdot (1 - 0.6) \cdot (-4) = 3.184$$

Vill man skatta $y\,(x = 3.2)$:

$$t = (x - x_i)/h_i = (3.2 - 3)/2 = 0.1$$
$$y = 4 + 0.1 \cdot (-2) + 0.1 \cdot (1 - 0.1) \cdot 4 + \\ + 0.1^2 \cdot (1 - 0.1) \cdot (-4) = 4.124$$

Vill man skatta $y(5.2)$ måste man beräkna nya värden på $h,\ \Delta y,\ g$ och c eftersom $x = 5.2$ ligger i nästa intervall.