OH till Föreläsning 11, Numme T1, 121108

GKN Kap 6.3. Differentialekvationer, forts: Randvärdesproblem

Dagens termer			
• Begynnelsevärdesproblem	• Randvärdesproblem	• Bandmatrismetoden	
• centraldifferenser	• enkelsidiga differenser	• sekantmetoden	• Finita-Differens-Metoden
• (Inskjutningsmetoden)	• (Finita-Element-Metoden)		

Finita DifferensMetoden (=FDM, fd Bandmatrismetoden)

Exempel 1:

$$2y'' + 4y' + xy = 3x^2 \qquad y(1) = 0.5, \quad y(2) = 0.9$$

Diskretisera intervallet, $y(x_i) = y_i$, $i = 0..n$ där n är antalet delar vi delat upp intervallet i. I vårt exempel är två y_i kända, $y_0 = 0.5$ och $y_n = 0.9$. Ersätt sedan alla derivator med differenser, centraldifferenser ger noggrannare svar (felet $\sim h^2$):

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} \qquad y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

Sätt in dessa approximationer i differentialekvationen och sortera sedan på index:

$$2\left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}\right) + 4\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) + x_i y_i = 3x_i^2 \qquad i = 1 \ldots n-1$$

$$\left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_{i-1} + \left(\frac{-4}{h^2} + x_i\right) y_i + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) y_{i+1} = 3x_i^2 \qquad i = 1 \ldots n-1$$

Om vi delar upp intervallet i fyra delar, $n = 4$, så får vi $h = (2-1)/4 = 0.25$, $x_i = 1 + i \cdot 0.25$ och

$$\left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_0 + \left(\frac{-4}{h^2} + x_i\right) y_1 + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) y_2 = 3x_1^2 \qquad i = 1$$

$$\left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_1 + \left(\frac{-4}{h^2} + x_2\right) y_2 + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) y_3 = 3x_2^2 \qquad i = 2$$

$$\left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_2 + \left(\frac{-4}{h^2} + x_3\right) y_3 + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) y_4 = 3x_3^2 \qquad i = 3$$

vilket när vi flyttar över alla kända y-värden till högerledet ger oss 3×3-ekvationssytemet för våra tre obekanta: (y_0 och y_4 är ju redan kända)

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{-4}{h^2} + x_1\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 \\ \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_2\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) \\ 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_3\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_0 \\ 3x_2^2 \\ 3x_3^2 - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) y_4 \end{pmatrix}$$

Om vi i stället hade delat upp intervallet i sex delar, $n = 6$ så hade vi fått $x_i = 1 + i \cdot (1/6)$ och de kända y-värdena skulle ha varit $y_0 = 0.5$ och $y_6 = 0.9$. Vi hade då haft fem obekanta y_1, y_2, y_3, y_4 och y_5 och vi hade fått 5×5-ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{-4}{h^2} + x_1\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_2\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_3\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_4\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_5\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_0 \\ 3x_2^2 \\ 3x_3^2 \\ 3x_4^2 \\ 3x_5^2 - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) y_6 \end{pmatrix}$$

Vi ser nu tydligare den typiska strukturen för FDM/bandmatrismetoden, ett band på diagonalen av matrisen och att första och sista ekvationen påverkats av randvillkoren.

Exempel 2 : $2y'' + 4y' + xy = 3x^2 \qquad y(1) = 0.5, \;\; y'(2) = 0.8$ Skatta $y(1.5)$ och $y(2)$

Låt oss återigen dela in intervallet i fyra delar, x-värdena är inga problem $x_i = 1 + i \cdot 0.25$, inte heller det vänstra randdvärdet $y_0 = 0.5$ men det andra är lite krångligare! Det vi har är derivatan och inte y-värdet. Vi har alltså inget värde på y_4. Men vi gör som vanligt, approximera derivatan med en centraldifferens:

$$y'(2) \approx \frac{y_5 - y_3}{2h} \quad \text{och} \quad y'(2) = 0.8 \quad \Longrightarrow \quad y_5 = y_3 + 2h \cdot 0.8 \qquad (*)$$

vi blandar tillfälligt in en påhittad punkt x_5 med tillhörande värde y_5. Vi tar också med denna extrapunkt när vi sätter in differenserna i differentialekvationen:

$$2\left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}\right) + 4\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) + x_i y_i = 3x_i^2 \qquad i = 1 \ldots n \quad \text{dvs} \quad i = 1 \ldots 4$$

$$\left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_{i-1} + \left(\frac{-4}{h^2} + x_i\right) y_i + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) y_{i+1} = 3x_i^2 \qquad i = 1 \ldots n \quad \text{dvs} \quad i = 1 \ldots 4$$

men i den sista ekvationen ersätter vi y_5 med uttrycket $(*)$ ovan vilket ger

$$\left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_3 + \left(\frac{-4}{h^2} + x_4\right) y_4 + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) y_5 = 3x_4^2$$

$$\left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_3 + \left(\frac{-4}{h^2} + x_4\right) y_4 + \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) \left\{y_3 + 2h \cdot 0.8\right\} = 3x_4^2$$

$$\left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h} + \frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) y_3 + \left(\frac{-4}{h^2} + x_4\right) y_4 = 3x_4^2 - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) \cdot 2h \cdot 0.8$$

vilket till slut ger oss 4×4-ekvationssystemet för våra fyra obekanta y_1, y_2, y_3 och y_4:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{-4}{h^2} + x_1\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 & 0 \\ \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_2\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_3\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{4}{h^2}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_4\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_0 \\ 3x_2^2 \\ 3x_3^2 \\ 3x_4^2 - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) \cdot 2h \cdot 0.8 \end{pmatrix}$$

Vi känner igen bandstrukturen med första och sista ekvationen lite speciella på grund av randvärdena. Skattningen av $y(1.5)$ hittar vi i y_2 och skattningen av $y(2)$ hittar vi i y_4.

Ett alternativ till föregående matris är följande. Inför på samma sätt som ovan extrapunkten y_5 men eliminera den inte utan lägg till det annorlunda randvillkoret som en extra ekvation:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{-4}{h^2} + x_1\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_2\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_3\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_4\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{-1}{2h}\right) & 0 & \left(\frac{1}{2h}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) y_0 \\ 3x_2^2 \\ 3x_3^2 \\ 3x_4^2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Fördelen med detta sätt är att man slipper göra en massa handräkningar för att eliminera extrapunkten, man sätter ju bara in randvillkoret. (Minskar risken att det blir fel!) Nackdelarna är att man får ett lite större ekvationssystem, man får med extrapunkten i sin lösningvektor (punkten finns ju inte och måste tas bort) och matrisen förlorar sin tridiagonala form.

Detta sätt kan alltid användas, dvs att man alltid som första och sista ekvation tar själva randvärdena. Då blir ekvationerna emellan exakt differensekvationerna utan ändringar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_1\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_2\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_3\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{2}{h}\right) & \left(\frac{-4}{h^2} + x_4\right) & \left(\frac{2}{h^2} + \frac{2}{h}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-1}{2h}\right) & 0 & \left(\frac{1}{2h}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3x_1^2 \\ 3x_2^2 \\ 3x_3^2 \\ 3x_4^2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

n	h	$y(2)_{band}$	Δ	$\Delta/$	$\hat{y}(2)_{band}$
4	0.25000	-14.254 108	-	-	-
8	0.12500	-15.657 830	-1.403 722	-0.467 908	-16.125 738
16	0.06250	-16.039 723	-0.381 893	-0.127 298	-16.167 021
32	0.03125	-16.137 317	-0.097 593	-0.032 531	-16.169 848

Valt värde -16.169848 ger $E_{trunk} = |(-16.169848) - (-16.167021)| = 0.002827$. Svarar jag -16.1698 får jag $E_{pres} = |(-16.1698) - (-16.169848)| = 0.000048$ dvs $E_{tot} = E_{trunk} + E_{pres} = 0.002827 + 0.000048 = 0.002875$ och slutsvaret -16.1698 ± 0.0029

Inskjutningsmetoden

Från förra veckan: Ett begynnelsevärdesproblem

Exempel 3 : $2y'' + 4y' + xy = 3x^2 \qquad y(1) = 0.5,\;\; y'(1) = 0.1 \qquad$ Skatta $y(2)$

Skriv om till standardform: $y'' = -2y' - \frac{1}{2}xy + \frac{3}{2}x^2$. En andra ordningens DE, inför två hjälpvariabler

$$\begin{cases} u1 = y \\ u2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u1' = \{y\}' = y' \\ u2' = \{y'\}' = y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u1' = u2 \\ u2' = -2u2 - \dfrac{1}{2}x \cdot u1 + \dfrac{3}{2}x^2 \end{cases} \text{ med } \begin{cases} u1_0 = 0.5 \\ u2_0 = 0.1 \end{cases}$$

```
function uprim=dudx(x,u);
uprim=[u(2);
-2*u(2)-0.5*x*u(1)+1.5*x*x];
```

```
x0=1; xslut=2; y0=0.5; yprim0=0.1;
u0=[y0; yprim0];
[xut,uut]=odRK('dudx',x0,xslut,u0,10);
plot(xut,uut)
n=length(xut);
yslut=uut(n,1)
```

Idag: Ett randvärdesproblem

Exempel 2 igen : $2y'' + 4y' + xy = 3x^2 \qquad y(1) = 0.5,\;\; y'(2) = 0.8 \qquad$ Skatta $y(2)$

Vi kan inte använda `ode45` eller `odRK` eftersom vi inte vet tillräckligt för att kunna starta! Men vi kan gissa $y'(1)$ och använda `ode45` och om vi då får att $y'(2) = 0.8$ så har vi gissat rätt.

Gissat $y'(1)$	2	1		
Gav $y(2)$	1.9744	1.5910		
Gav $y'(2)$	1.5411	1.5254		
$fel = y'(2) - 0.8$	0.7411	0.7254		

Vår uppgift är alltså att hitta ett värde på $y'(1)$ så att $y'(2) = 0.8$. Men detta är ekvationslösning!!! Vi sätter ihop en funktion som skall bli noll när vi har gissat rätt. Då har vi fått fram det värde som behövs för att kunna lösa differentialekvationen med en vanlig begynnelsevärdes-problemlösare.

```
function [fel]=felfunk(giss);
x0=1; xslut=2; y0=0.5; ratt=0.8;
yprim0=giss;
u0=[y0; yprim0];
[xut,uut]=odRK('dudx',x0,xslut,u0,10);
n=length(xut);
yslut=uut(n,1); yprimslut=uut(n,2);
fel=yprimslut-ratt;
```

.

```
giss0=2; giss1=1;
fel0=felfunk(giss0);
disp(' Gissning   Fel   Korr');
disp([giss0 fel0])
t=1;
while abs(t)>1e-12;
   fel1=felfunk(giss1);
   t=fel1*(giss1-giss0)/(fel1-fel0);
   disp([giss1 fel1 t])
   fel0=fel1; giss0=giss1; giss1=giss1-t;
end;
yprimstart=giss1

x0=1; xslut=2; y0=0.5;
u0=[y0; yprimstart];
[xut,uut]=odRK('dudx',x0,xslut,u0,10);
plot(xut,uut);
n=length(xut);
yslut=uut(n,1)
```

Man kan förstås byta ut Runge-Kutta mot Matlabs `ode45` och den egenskrivna sekantmetoden mot Matlabs `fzero`!

```
function [fel,xut,uut]=felfunk2(giss);
x0=1; xslut=2; y0=0.5; ratt=0.8;
yprim0=giss;
u0=[y0; yprim0];
[xut,uut]=ode45('dudx',[x0,xslut],u0);
n=length(xut);
yprimslut=uut(n,2);
fel=yprimslut-ratt;
```

```
giss0=-45;
yprimstart=fzero('felfunk2',giss0)

[fel,xut,uut]=felfunk2(yprimstart)
plot(xut,uut);
yslut=uut(end,1)
yprimslut=uut(end,2)
```

En hjälp för att hitta en bra startgissning kan vara:

```
gg=[-10:5:20]; mm=[];
for g=gg; m=fehl(g,0); mm=[mm m]; end;
plot(gg,mm);
grid on
```

Felskattning

Då vi i Runge-Kutta gjort räkningar med konstant steg kan vi Richardson-extrapolera:

n	h	$y(2)_{RK}$	Δ	$\Delta/$	$\hat{y}(2)_{RK}$
10	0.1000	-16.167 759 802	-	-	-
20	0.0500	-16.169 906 637	-0.002 146 834	-0.000 143 122	-16.170 049 759
40	0.0250	-16.170 032 762	-0.000 126 125	-0.000 008 408	-16.170 041 170
80	0.0125	-16.170 040 404	-0.000 007 642	-0.000 000 510	-16.170 040 914

Regelbundna kvoter gör att valt värde blir -16.170040914. $E_{trunk} = |(-16.170040914)-(-16.170041170)| = 0.000000256$. Avrundat till sju decimaler blir $E_{pres} = |(-16.1700409) - (-16.170040914)| = 0.000000014$. $E_{tot} = E_{trunk} + Epres = 0.000000270$ och slutsvaret $-16.1700409 \pm 0.0000003$.

I programmet med `ode45`, skattar vi trunkeringsfelet genom att prova olika toleranser:
$RelTol = 1\cdot 10^{-6} \Rightarrow n = 18$, $y_0' = -45.326101697$, $y(2) = -16.170043359$ och $RelTol = 1\cdot 10^{-9} \Rightarrow n = 35$, $y_0' = -45.326095709$, $y(2) = -16.170040955$ varvid vi svarar $y(2) = -16.17004$.

Felgränsen i `fzero` respektive sekantmetoden gör i detta exempel ingen skillnad, ety felfunktionen i detta exempel är en rät linje, dvs metoderna ger ett svar med alla siffrorna rätt efter bara ett steg. Då detta inte gäller: försök välja felgränsen i ekvationslösningsmetoden så liten att den kan försummas i slutsvaret. Annars får vi ett E_{trunk} från ekvationslösandet också.