

LÖSNINGAR till Tentamen i Numeriska metoder gk2 och gk3, 07-11-12

Tentans del 1 är frågor hämtade från "Femtio teorifrågor". Här visas lösningsförslag till del 2 (25p).

1. Valv med stolpar

Lös ekvationen $12 \sin v - 10 \sin^3 v - 3.9 = 0$ för att finna v -värdet (vinkel mätt i radianer). Därefter erhålls x -värdet av $x = 10 \cos^3 v$. Två lösningar finns för $x > 0$. Lös med Newton-Raphson:

```

vgiss=[0.2 1.2];      % gissningsvinkel i radianer
for j=1:2
    v=vgiss(j); dv=1;
    while abs(dv)>1e-10
        f=12*sin(v)-10*sin(v)^3-3.9;
        fp=12*cos(v)-30*sin(v)^2*cos(v);
        dv=-f/fp; v=v+dv;
    end
    xv=10*cos(v)^3;
    xpos=[-xv xv]
end

```

Stolparna ska placeras vid x -positionerna ± 8.0617 och ± 1.2536 .

2. Takläggning av valvet

Ellipstakets båglängd: $\int_0^\pi \sqrt{(dx/dt)^2 + (dz/dt)^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{10^2 \sin^2 t + 8^2 \cos^2 t} dt$.

Innertaket består av två valvbågar med båglängden $\int_0^{\pi/2} \sqrt{(dx/dv)^2 + (dz/dv)^2} dv$ där $dx/dv = -30 \cos^2 v \sin v$ och $dz/dv = 12 \cos v - 30 \sin^2 v \cos v$. Trapetsregeln (utan extrapolation) är lämplig för integralberäkning med periodiska integrander som vi har här.

```

% Det ellipsformade takets area = ellipsbåglängd * 14
n=600;
dv=pi/n; v=0:dv:pi;
f=sqrt(10^2*sin(v).^2+8^2*cos(v).^2);
bage=dv*(sum(f)-0.5*(f(1)+f(end)))
tak_area=bage*14

```

```

% De båda kaustikavalvens area= 2*valvbåglängd * 14
n=300;
dv=pi/2/n; v=0:dv:pi/2;
xprim=-30*cos(v).^2.*sin(v);
zprim=12*cos(v)-30*sin(v).^2.*cos(v);
f=sqrt(xprim.^2+zprim.^2);
valvbage=dv*(sum(f)-0.5*(f(1)+f(end)))
valv2area=2*valvbage*14
% Beräkna differensen för att avgöra vadslagningen
areadifferens=tak_area-valv2area

```

Yttertakets area är 397.06 m^2 och innertakets 396.62 m^2 , alltså en differens på mindre än en halv m^2 .

3. Hitta halvcirkel

Använd Gauss-Newtons metod för att bestämma a och R i den icke linjära modellen med tio ekvationer: $(x_i - a)^2 + y_i^2 - R^2 \approx 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 10$.

Jacobianen J blir en 10×2 -matris med första kolumnen $-2(x_i - a)$. Andra kolumnens tio element är alla $-2R$. I varje iteration löses ett överbestämt linjärt ekvationssystem med minstakvadratmetoden.

```
x=[5 6 9 10 11 15 17 18 21 23]';
y=[3 6 8 9 9 11 10 11 10 7]';
plot(x,y,'*'), hold on, axis equal
a=15; R=10;
for iter=1:5 % eller använd while norm(dp)>1e-10
    f=(x-a).^2 + y.^2 - R^2;
    fnorm=norm(f)
    J=[-2*(x-a) -2*R*ones(10,1)];
    dp=-J\f; % minstakvadratmetoden i matlab
    a=a+dp(1); R=R+dp(2);
end
a,R
fi=0:pi/60:pi; X=a+R*cos(fi); Y=R*sin(fi);
plot(a,0,'x', X,Y)
```

4. ODE-kvast

a) Omforma till ett ode-system: Inför $u_1 = y$ och $u_2 = y'$. Det leder till $u'_1 = y' = u_2$ och $u'_2 = y'' = -u_2^2/u_1 - u_2/(x+1) - 3/u_1 + 3$.

```
function f=fkvast(x,u)
    f=[u(2) -u(2)^2/u(1)-u(2)/(x+1)-3/u(1)+3]';
```

b) Använd RK4 för att beräkna och rita de elva kurvorna. (I koden visas också ode45-lösningen fram till $x = 1.3$.)

```
function kvast
clear, clf
tol=odeset('RelTol',1e-6); % Behövs för ode45
xslut=2.5;
for k=2:0.1:3
    x=0; h=0.02;
    X=x; Y=0.4;
    u=[0.4 k]';
    while u(2)>-3 & x<xslut-h/2
        f1=fkvast(x,u);
        f2=fkvast(x+h/2,u+h*f1/2);
        f3=fkvast(x+h/2,u+h*f2/2);
        f4=fkvast(x+h,u+h*f3);
        u=u+h*(f1+2*f2+2*f3+f4)/6;
        x=x+h;
        X=[X; x]; Y=[Y; u(1)];
        plot(X,Y), hold on
    end
    [x u']
    [X,U]=ode45(@fkvast,[0 1.3],[0.4 k]',tol);
    plot(X,U(:,1),'r.')
end
```