

DN1240, DN1241, Tentamen i Numeriska metoder gk2 och gk3**Måndag 12 november 2007 kl 9–12**

Betygsgränser (inkl bonuspoäng): 20p E, 23p D, 26p C, 29p B, 32p A.

(17–19p ger FX, komplettering till E kan göras.)

Hjälpmedel i del 2 är *rosa formelsamlingen* som får tas fram när del 1 har lämnats in.**DEL 2** (25 poäng)**1. Valv med stolpar**

Valvbågarna i figuren nedan skapas av en kaustikakurva som definieras av

$$x(v) = 10 \cos^3 v, \quad z(v) = 12 \sin v - 10 \sin^3 v, \quad 0 \leq v \leq \pi$$

- (5p) (längdenheten är meter). På de platser där $z(v) = 3.9$ ska stödjande stolpar placeras. Det är ett ekvationslösningsproblem. Skriv en algoritm (gärna i Matlab) som med Newton-Raphsons metod beräknar var stolparna ska stå.

2. Takläggning av valvet

Den 14 meter långa tunneln har ett tak vars tvärsnitt är designat som en halv ellips med parameteruttrycket

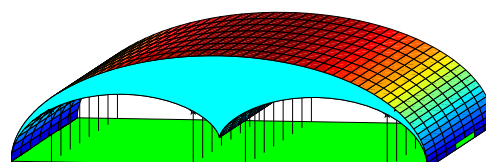
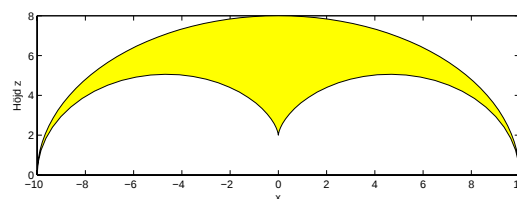
$$x(t) = 10 \cos t, \quad z(t) = 8 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Innertaketets tvärsnitt är kaustikakurvan ovan. Takläggarna har vadslagning om det är inner- eller yttertaket som har den största arean. Med två båglängdsberäkningar (och mult med 14) kan man förutse hur mycket takmaterial som ska anskaffas till vardera taket och dessutom avgöra vadslagningen.

(6p)

Visa en effektiv algoritm för beräkningen.

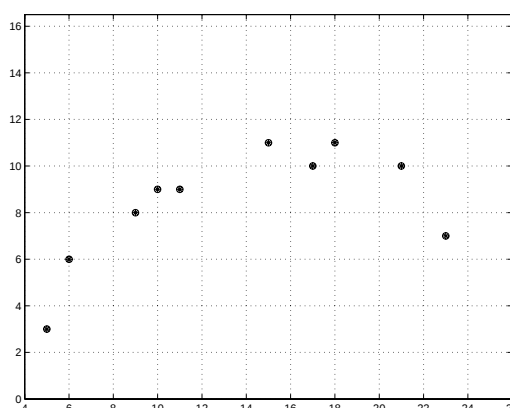
Båglängdsformeln finns på baksidan av rosa formelsamlingen. Trapetsregeln bör utnyttjas!



Tunnel med 3.9 m höga stolpar.

3. Hitta halvcirkel

- (6p) Du har fått tillgång till tio uppmätta punkter som är plottade i figuren. Du får förutsätta att de finns lagrade i en x -vektor och en y -vektor. Uppgiften är att till punkterna finna bästa möjliga anpassande halvcirkel: $(x - a)^2 + y^2 = R^2$ (cirkeln har centrum på x -axeln). Vilken metod bör användas på problemet? Ge en algoritm som beräknar de obekanta parametrarna och ritar upp de tio punkterna och förstås den funna halvcirkeln.



Vänd!

4. ODE-kvast

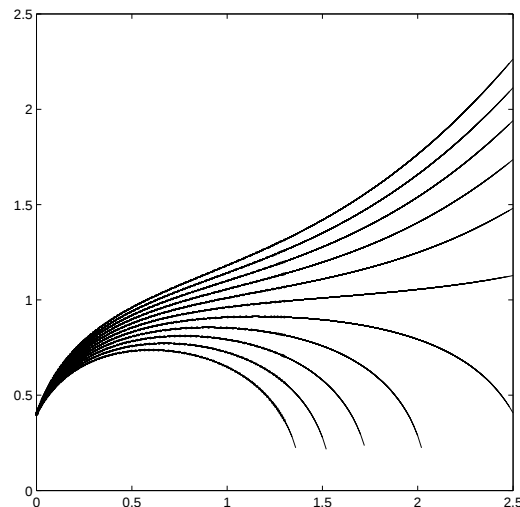
Den kvastliknande kurvskaran är lösningskurvor till differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{1}{(x+1)} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{y} - 3 = 0$$

med $y(0) = 0.4$. För den understa kurvan är startderivatan $y'(0) = 2.0$ och för den översta är $y'(0) = 3.0$.

Totalt finns elva kurvor med startderivatan successivt ökande med 0.1 (alltså 2.0, 2.1, 2.2, ..., 3.0).

- (2p) **a)** Börja med att omforma differentialekvationen till ett ode-system av första ordningen. Skriv en funktion som kan utnyttjas i en RK4-algoritm (eller anropas av ode45).



- (6p) **b)** Vi vill få figurens elva kurvor uppritade. Det sker lämpligast med en RK4-algoritm med steget 0.02. Somliga kurvor viker snabbt av nedåt och når som synes aldrig fram till x_{slut} -värdet 2.5. Låt din lösningsalgoritm i sådana fall avbryta när kurvlutningen blir kraftigt negativ, förslagsvis då y' -värdet passerar -3 .

För dig som inte lyckas med RK4-algoritmen men vill få några poäng (max 3p):

Från $x = 0$ till $x = 1.3$ betar sig alla elva kurvorna snällt och ode45 kan användas. Prova det! (I figuren är ode45-lösningen markerad med små punkter.)