

Fö 11, DN1215 ME, Paraboliska PDE'er och 3D-grafik

Ref: MATLAB 7 i korthet, sec 14.14

Givet modellproblemet

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$$

Området diskretiseras enligt

$$x_i = (i-1)h, i = 1, 2, \dots, N, h = 1/N \quad t_j = (j-1)k, j = 1, 2, \dots \quad u_{j,i} \approx u(x_i, t_j)$$

Differentialekvationen diskretiseras enligt

$$\frac{u_{j+1,i} - u_{j,i}}{k} = \frac{u_{j,i+1} - 2u_{j,i} + u_{j,i-1}}{h^2}$$

Med begynnelsevärden och randvärden diskretiserade, och omstuvning enligt

$$u_{j+1,i} = u_{j,i} + \kappa(u_{j,i+1} - 2u_{j,i} + u_{j,i-1}), \quad \kappa = \frac{k}{h^2}$$

får vi följande algoritm, som finns i kursbiblioteket som **parab1.m**

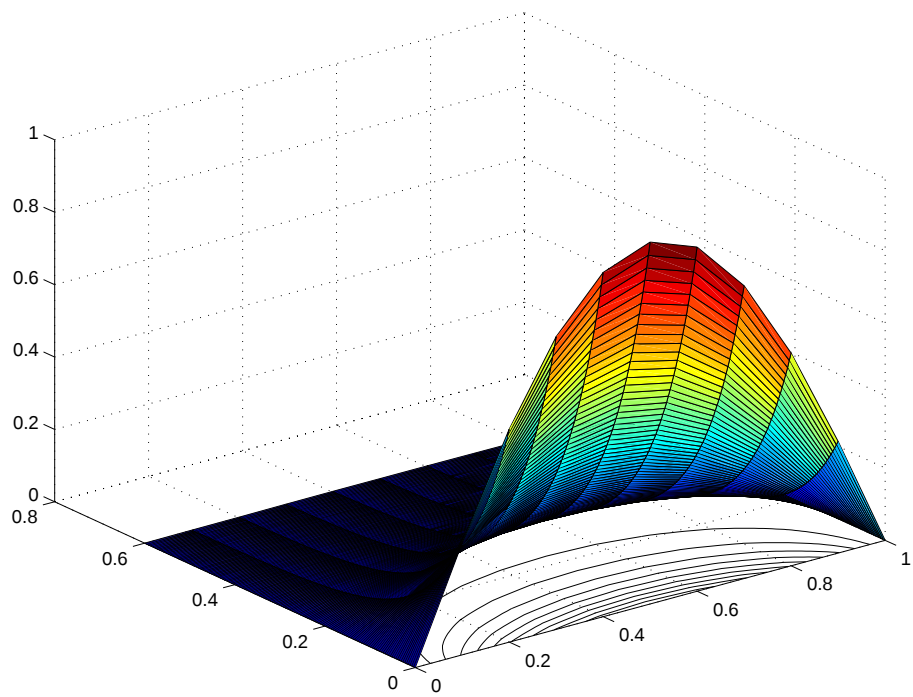
```
clf, clear
h=0.1; k=0.004; %steglängder i x-led och t-led
%h=0.1; k=0.04; %steglängder i x-led och t-led för beräkning nr 2

x=0:h:1; t=0:k:0.6;
N=length(x); M=length(t);
kh2=k/h^2;
[X,T]=meshgrid(x,t);

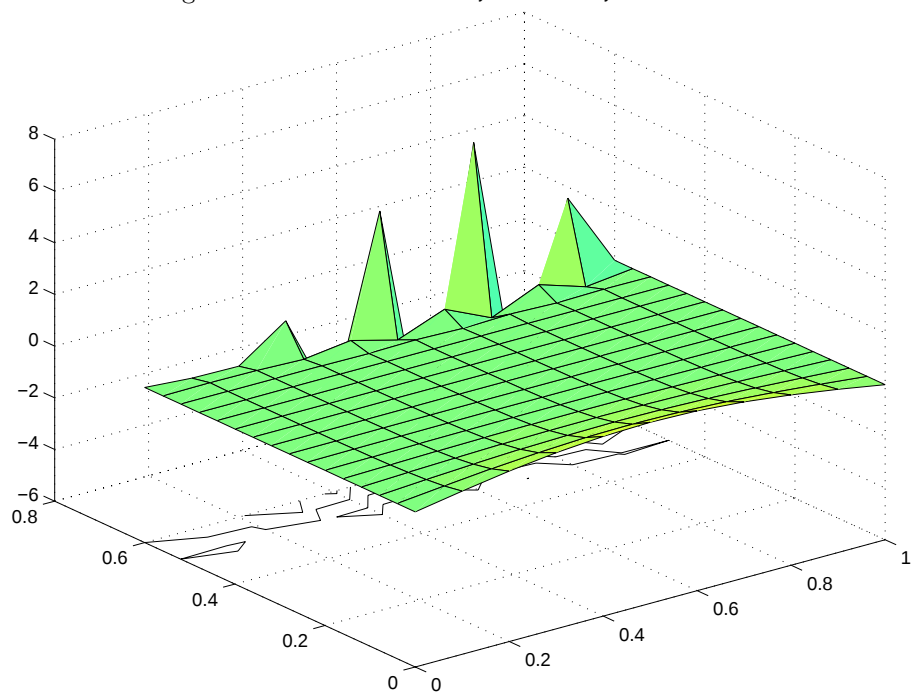
u(1,:)=sin(pi*x); %begynnelsevärden

for j=1:M-1
    j1=j+1;
    u(j1,1)=0; u(j1,N)=0; %randvärden
    for i=2:N-1
        u(j1,i)=u(j,i)+kh2*(u(j,i-1)-2*u(j,i)+u(j,i+1));
    end
end

surfc(X,T,u)
```



Ovanstående figur beräknad med $h=0.1$; $k=0.004$;



Ovanstående figur beräknad med $h=0.1$; $k=0.04$; Som synes blir beräkningarna instabila, felen oscillerar och växer med tiden.

Method of lines

Givet modellproblemet

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$$

Området i x -led diskretiseras enligt

$$x_i = (i-1)h, i = 1, 2, \dots, N, h = 1/N, u_i \approx u(x_i, t)$$

Observera att u_i är en funktion av t definierad på linjen $x = x_i$ i xt -planet.

Rumsderivatan diskretiseras längs de inre linjerna enligt

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad i = 2, \dots, N-1$$

och från randvillkoren får vi $u_1(t) = 0, u_N(t) = 0$.

Vi har nu följande system av ordinära differentialekvationer

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \text{med } \mathbf{u} = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{N-1})^T$$

och A en tridiagonal matris med diagonalelementen $-2/h^2$ och elementen just under och över diagonalen $1/h^2$. Vi skriver $A = \text{trid}(1/h^2, -2/h^2, 1/h^2)$.

Om vi löser det ordinära differentialekvationssystemet med Eulers metod får vi

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + k\mathbf{A}\mathbf{u}_j$$

vilket är samma metod som tidigare. (visa det!)

Om vi i stället använder Bakänges Euler får vi

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + k\mathbf{A}\mathbf{u}_{j+1} \quad \text{dvs} \quad (\mathbf{I} - k\mathbf{A})\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem med en tridiagonal koefficientmatris

$$I - kA = \text{trid}(-\kappa, 1 + 2\kappa, -\kappa)$$

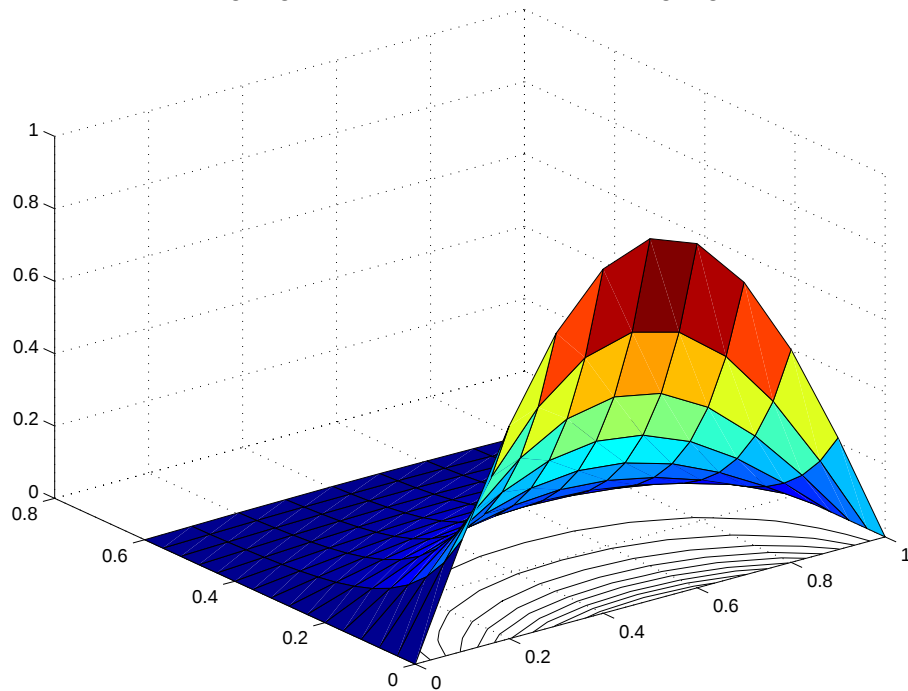
att lösas i varje tidssteg. Programmet `parab2.m` blir

```
clf, clear
h=0.1; k=0.04; x=0:h:1; t=0:k:0.6;

N=length(x); M=length(t);
kh2=k/h^2;
[X,T]=meshgrid(x,t);

u(1,:)=sin(pi*x);
for j=1:M-1
    j1=j+1;
    u(j1,1)=0; u(j1,N)=0;
    for i=2:N-1
        A(i-1,i-1)=1+2*kh2;
        if i>2, A(i-1,i-2)=-kh2; end
        if i<N-1, A(i-1,i)=-kh2; end
    end
    u(j+1,2:N-1)=A\u(j,2:N-1)';
end
surfc(X,T,u)
```

Resultatet med steglängderna $h=0.1$; $k=0.04$; blir enligt figuren nedan



Som synes har vi inga instabiliteter i lösningen, trots det stora tidssteget! Vi kan analysera våra två metoder med verktyg för numerisk lösning av ordinära differentialekvationer.

Den tridiagonal matrisen A har egenvärdena $-\pi^2, \dots, -4/h^2$, dvs med $h = 0.1$ ligger egenvärdena i intervallet $(-9, -400)$. Systemet är ett styvt differentialekvationssystem!

Undersök stabiliteten med hjälp av testekvationen.

För Eulers metod får vi stabilitetsvillkoret $k/h^2 \leq 1/2$, medan Baklänges Euler är stabil för alla positiva steglängder k .