F4

Interpolation NAM 3.1-3.3;

Kvadratur NAM 5

Richardson-extrapolation NAM 3.8

EXS 4.2, 4.11, 5.2

Interpolation med polynom, I

Interpolation – " att läsa mellan raderna i en tabell"

Tabell $(x_i,y_i), i = 1,2,\ldots,N$ (MATLAB: X(1:N),Y(1:N))

- $y_i = f(x_i)$
- f "snäll', är känd bara genom sina tabell-värden
- `c=polyfit(x,y,N-1)` ger polynom precis (?) genom givna punkter:

  Om alla x_i olika finns precis ett

  n-grads polynom med $P(x_i) = y_i, i = 1,2,\ldots,n+1$

Newton:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)(x-x_2) + c_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \ldots$$
$$+ c_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

…

Interpolation med polynom, II

$x = x_1$ ger $p_n(x_1) = c_0 = y_1$;
alla andra termer har en faktor $(x - x_1) = 0$
$x = x_2$ ger $p_n(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_1) = y_2 \Rightarrow$

$$c_1 = (y_2 - c_0)/(x_2 - x_1)$$

d:o, $(x - x_2)$
$x = x_3$ ger $p_n(x_3) = c_0 + c_1(x_3 - x_1) + c_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = y_3 \Rightarrow$

$$c_3 = (y_3 - c_0 - c_1(x_3 - x_1))/[(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)]$$

$x = x_{n+1}$ ger $p_n(x_{n+1}) = c_0 + c_1(x_{n+1} - x_1) + \ldots + c_n(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_n) = y_{n+1} \Rightarrow$

$$c_n = (y_{n+1} - c_0 - c_1(x_{n+1} - x_1) - \ldots)/[(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_n)]$$

Under-triangulärt linjärt ekvationssystem,
diagonal-elementen nollskilda om alla xi olika
VSB

Interpolation med polynom, III

Fel vid interpolation med *n*-tegrads polynom

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n+1})$$

$$\approx c_{n+1}(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n+1})$$

- ”nästa term”, ung. n+1-grads poly.
- 0 i datapunkterna
- 0 om f är n-tegradspolynom
- felkurvan f – pn slingrig, stora utflykter mellan punkterna: Högt gradtal olämpligt, ”Runges fenomen” (NAM 3.2)

Kurvor, interpolation, etc. IV

MATLAB

`polyfit, polyval` med antal punkter = gradtal+1

eller egen konstruktion för Newton-formen.

Tabell-slagning

Interpolation med högt gradtal är mycket känslig, interpolanten tenderar att slingra sig mycket mellan datapunkterna.

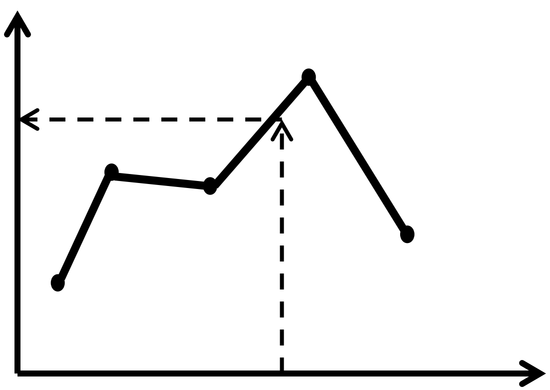
Man använder ” styckevis” polynom med gradtal 1 eller 3 istället

Linjär interpolation:

Givet *x*, välj intervall så att

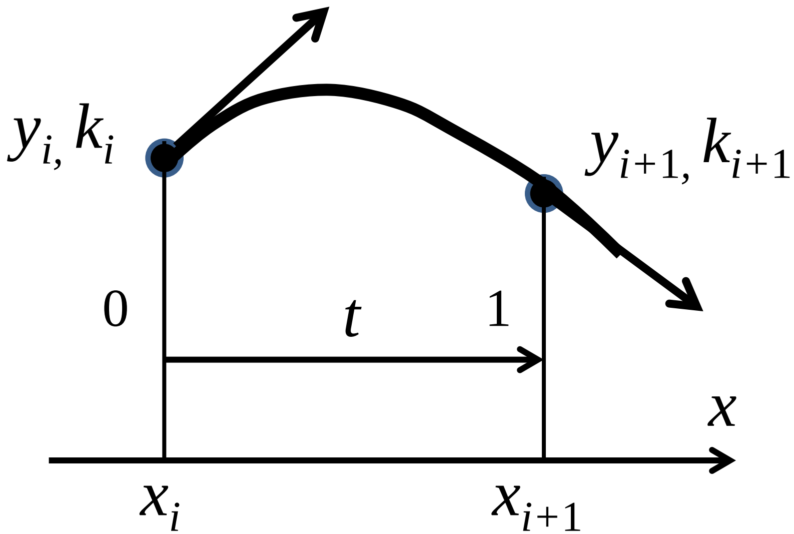
$x_{i-1} < x \le x_i$. Då blir

$$P_1(x) = f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (f_i - f_{i-1})$$



Kurvor, interpolation, etc. V

Den linjära interpolanten har diskontinuerlig derivata.
Glattare kurva med högre-gradspolynom, vanligen kubiska Hermite-interpolant, Splines, Bézier-kurvor, B-splines, NURBS, …



Kurvor, interpolation, etc. VI

Hermite

Konstruktion av $P(x)$ i intervallet x_{i-1}, x_i som interpolerar till y_{i-1} och y_i och har derivator k_{i-1} och k_i i x_{i-1}, x_i

Se NAM 3.3 !

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

$$x = x_i + t \cdot h_i, \quad 0 < t \le 1$$

Följande ansats ger lite mer symmetriska uttryck och hänger ihop med Bézier- (Bernstein) polynomen

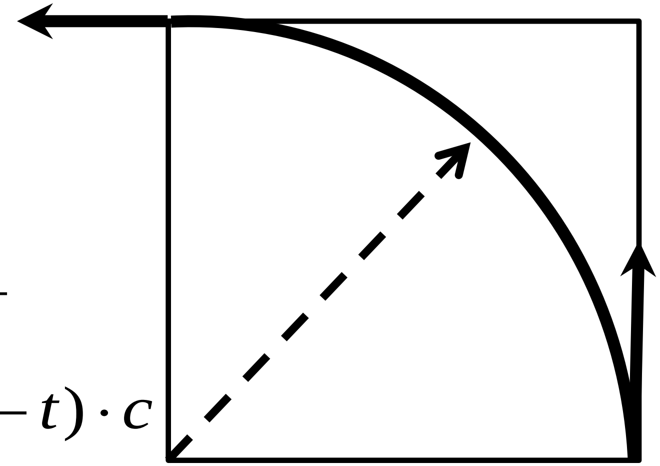
$$P(x) = P(x_i + t \cdot h_i) = y_i + t \cdot \Delta y_i + t(1-t)^2 \cdot g_i + t^2(1-t) \cdot c_i$$

$$g_i = h_i k_i - \Delta y_i, c_i = \Delta y_i - h_i k_{i+1}$$

Kurvor, interpolation, etc. VII

Exempel

Parameterkurva $x = P(t)$, $y = Q(t)$, $0 < t < 1$,
kvarts enhetscirkel i första kvadranten:



$$P = \cos\frac{\pi}{2}t, Q = \sin\frac{\pi}{2}t : Q(t) = P(1-t)$$

$$P(0) = 1, P(1) = 0, P'(0) = 0, P'(0) = -\frac{\pi}{2}$$

$$P(t) = 1 + t \cdot (0-1) + t(1-t)^2 \cdot g + t^2(1-t) \cdot c$$

$$g = 0 - 1, c = 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$P = 1 - t - t(1-t)^2 + t^2(1-t) \cdot (1 + \frac{\pi}{2}) :$$

$$P(1/2) = Q(1/2) = 1/2 + 1/8 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{8+\pi}{16}$$

$$r = \sqrt{P^2 + Q^2} = 0.9848$$

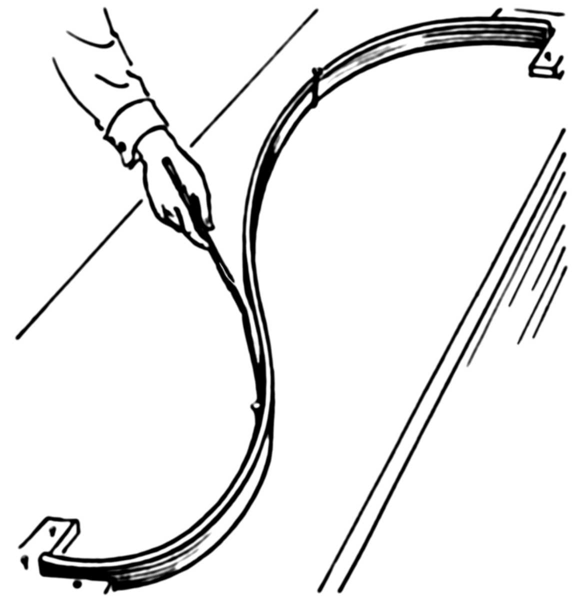
Kurvor, interpolation, etc. VIII

Kubiska Splines

Finn den ”glattaste” kurva som passerar (x_i, y_i), $i = 1,\ldots,N$

$$\min \int_{x_1}^{x_N} y''(x)^2\,dx \qquad (*)$$

$$s.t. \quad y(x_i) = y_i,\ i = 1,\ldots,N$$



Man kan visa, att

- $y^{(iv)} = 0$ mellan punkterna, dvs. y styckev tredjegradspolynom
- y, y', y'' kontinuerliga överallt
- Kubisk spline, Sv. Ri-funktion

Om man väljer lutningarna k_i, $i = 1\ldots N$ i x_i så ger Hermite-interpolanten ett styckevis tredjegradspolynom med y och y' kontinuerliga överallt. Välj k_i så att även y'' blir kontinuerlig! så får man lösningen till (*)

Kurvor, interpolation, etc. IX

$$P_i(x_i + t \cdot h_i) = y_i + t \cdot \Delta y_i + t(1-t)^2 \cdot g_i + t^2(1-t) \cdot c_i$$

$$g_i = h_i k_i - \Delta y_i, c_i = \Delta y_i - h_i k_{i+1}$$

$$P_i''(x_i) = \frac{1}{h_i^2} \frac{d^2 P}{dt^2}(0) = \frac{1}{h_i^2}(-4g_i + 2c_1),$$

$$P_{i-1}''(x_i) = \frac{1}{h_{i-1}^2} \frac{d^2 P_{i-1}}{dt^2}(1) = \frac{1}{h_{i-1}^2}(2g_{i-1} - 4c_{i-1}):$$

$$P_i''(x_i) = P_{i-1}''(x_i), i = 2, \ldots, N-1$$

Tri-diagonalt ekvationssystem för k_i

Saknar 2 ekvationer: Randvillkor

- Naturliga splines: $P''(x_1) = P''(x_N) = 0$
- ”Not-a-knot”: P''' kontinuerlig i x_2, x_N
- Föreskriven lutning: k_1, k_N givna
- Periodisk: $k_N = k_1$ (i rad 1 och N-2)

Kvadratur, I

Integrand

Beräkna $$I = \int_a^b f(x)\,dx$$ som $$I \approx \sum_{j=0}^{n} w_j\, f(x_j)$$

Vikter Abskissor

också b = infty eller där f har integrabla singulariteter, $$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Kvadratur, II

Exempel – Newton-Cotes formler

utgår från ekvidistanta abskissor, $x_j = a + \frac{b-a}{n} j,\ j = 0,1,\dots,N$

Trapetsregeln

n = 1 ger $w_0 = w_1 = (b\text{-}a)/2$. Linjär interpolation ger

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

och felet kan överskattas

$$\left| I - \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \right| \le \frac{1}{2} \max_{x\in(a,b)} |f''| \left| \int_a^b (x-a)(x-b)dx \right|$$

$$= \max_{x\in(a,b)} |f''| \frac{(b-a)^3}{12}$$

Kvadratur, III

Upprepad Trapetsregel

Med $(x_i,f_i), i = 0,1,\ldots,N$, $x_0 = a$, $x_\mathrm{N} = b$, kan trapetsregeln användas för varje delintervall (x_i,x_{i+1}):

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}(x_{j+1} - x_j)\cdot(f_{j+1} + f_j)$$

MATLAB

```
trapz = 0.5*sum(diff(x).*(f(1:end-1)+f(2:end)));
```

Ekvidistanta punkter, $h = x_{i+1} - x_i$, blir formeln

```
Th = h*(sum(f)-(f(1)+f(end))/2);
```

med fel begränsat av $\frac{N}{12}\max|f''|h^3 = \frac{b-a}{12}\max|f''|h^2$

Kvadratur, IV

Euler McLaurins summationsformel

$$T(h) = \int_a^b f(x)dx + \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) - \frac{h^4}{720}(f'''(b) - f'''(a) + \frac{h^6}{30240}(f^{(v)}(b) - f^{(v)}(a)) + \ldots$$

$$+ c_{2r}h^{2r}(f^{(2r+1)}(b) - f^{(2r+1)}(a)) + O(h^{2r+2}) \text{ då } h \to 0$$

- Asymptotisk serie i jämna potenser av steglängden
- Litet fel för periodisk funktion eller
- Små värden i ändpunkterna, ex.

$$\int_{-A}^{+A} e^{-x^2} dx$$

Kvadratur, V

Exempel $$\int_{-10}^{+10} e^{-x^2}\,dx \approx \sqrt{\pi}$$

N	T(h)	Fel
4	0.00019927	-1.772e+000
8	0.74241496	-1.030e+000
16	1.75869593	-1.376e-002
32	1.77245385	-1.785e-010
64	1.77245385	3.331e-015
128	1.77245385	-3.553e-015

Extrapolation, I

$$I - T(h) = c_2 h^2 + c_4 h^4 + c_6 h^6 + \ldots$$

Räkna med steglängd h och Qh (Q = 2 vanligt)

$$\begin{aligned} I - T(h) \quad &= c_2\, h^2 \\ I - T(Qh) &= c_2\, (Qh)^2 \end{aligned}$$

som ger

$$I = \hat{T}(h) = T(h) + \frac{T(h) - T(Qh)}{Q^2 - 1} + k_4 h^4 + k_6 h^6 + \ldots$$