

F5: Integraler, forts.

- Generaliserade integraler

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x)dx$$

$$2) \quad f \text{ inte begränsad: } \int_0^{\infty} f(x)dx, f(x) = O(x^{-p}) \text{ då } x \downarrow 0$$

- Gauss & adaptiv kvadratur

Integraler, II

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \underbrace{\int_1^A f(x)dx}_{\text{Trapetsregel, quad, ...}} + \underbrace{\int_A^{\infty} f(x)dx}_A$$

$R(A) = \text{"Svans"}$

- Välj A så att $|R(A)| < \text{tol}$.
- Är det möjligt (Existerar gränsvärdet då $A \rightarrow \infty$?)

Ja,

”Absolut-konvergens” om $|f(x)| = O(x^{-p})$ med $p > 1$ då $x \rightarrow \infty$

”Betingad konvergens” – svårare,

$$\int_1^A \sin x^2 dx = \int_1^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \left[-\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} \right]_1^A - \underbrace{\int_1^A \frac{\cos t}{4t^{3/2}} dt}_{g(t)}, \quad |g(t)| = O(t^{-3/2})$$

Integraler, III

Exempel

Bestäm integralen med fel $< 0.5 \cdot 10^{-4}$

$$\int_0^{\infty} \frac{30}{1+x^4 + \sqrt{1+x^3}} dx = \underbrace{\int_0^T \frac{30}{1+x^4 + \sqrt{1+x^3}} dx}_{I(T)} + R(T), R(T) = \int_T^{\infty} \frac{30}{1+x^4 + \sqrt{1+x^3}} dx$$

$$R(T) = \int_T^{\infty} \frac{30}{1+x^4 + \sqrt{1+x^3}} dx < \int_T^{\infty} \frac{30}{x^4} dx = 10T^{-3} < \varepsilon \Rightarrow T > \left(\frac{10}{\varepsilon} \right)^{1/3}$$

Reservera $0.4 \cdot 10^{-4}$ av tillåtet fel för numerisk beräkning av $I(T)$ dvs. tag $\varepsilon = 10^{-5}$. Då räcker $T = 100$.

Fiffigare: Använd approximativa värdet till förbättring ist.f. feluppskattning. Hur stort T räcker då? (på tavlan)

Integraler, IV

Exempel: Integrabel singularitet

$$\int_0^A f(x) dx = \int_0^A x^p g(x) dx, g(x) \rightarrow 1 \text{ då } x \downarrow 0$$

Om $-1 < p < 0$ har f singularitet men integralen existerar.

Prova substitutionen $x = t^a$, $dx = a t^{a-1} dt$

$$\int_0^A x^p g(x) dx = a \int_0^{A^{1/a}} t^{ap} g(t^a) t^{a-1} dt$$

Om $ap + a - 1 = 0$ är integranden snäll vid $t = 0$: $a = 1/(p+1)$

Alternativ:

- Partiell integration (x^p integreras och g deriveras)
- Subtraktion och analytisk integration av x^p ,

Integraler, V

Exempel: Integrabel singularitet

$$\int_0^A f(x) dx = \int_0^A x^p g(x) dx, g(x) \rightarrow 1 \text{ då } x \downarrow 0$$

Om $-1 < p < 0$ har f singularitet men integralen existerar.

Prova substitutionen $x = t^a$, $dx = a t^{a-1} dt$

$$\int_0^A x^p g(x) dx = a \int_0^{A^{1/a}} t^{ap} g(t^a) t^{a-1} dt$$

Om $ap + a - 1 = 0$ är integranden snäll vid $t = 0$: $a = 1/(p+1)$

Alternativ:

- Partiell integration (x^p integreras och g deriveras)
- Subtraktion och analytisk integration av x^p ,

Integraler, V

Gauss-kvadratur: Listigt val av abskissor och vikter så att

$$\int_{-1}^1 p(x)dx - \sum_{j=1}^n w_j f(\xi_j) = 0$$

för alla polynom p av gradtal $2n-1$

- För givna ξ_j kan w_j bestämmas så att felet försvinner för polynom av gradtal $n-1$
- Gauss-vikterna är positiva (numerisk stabilitet)
- Gauss-abskissor i det inre av $[-1,1]$
- ξ_j är nollställena till Legendre-polynomet P_{n-1}

- P_m är familj ortogonala polynom,
$$\int_{-1}^1 P_j(x)P_k(x)dx = 0, \text{ om } j \neq k$$

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = C \cdot (x^2 + c)$$

$$(c = -1/3)$$

Integraler, VI

Adaptiv kvadratur:

Ide: Dela upp intervallet I i två, I_1 och I_2 .

Beräkna $T(I_1)$ och $T(I_2)$.

Om $|T(I) - (T(I_1) + T(I_2))| < \text{tol}$, *) eller annan feluppskattning acceptera $T(I_1) + T(I_2)$ som värde på integralen över I .

Annars:

Arbeta vidare med I_1

spara I_2 till senare

Integraler, VII

rekursiv trapetsregel T(.)

```
push([a,b,trap(a,b),tol]);      % spara hela intervallet
Integ = 0;                      % ackumulator för integral
while N>0                      % så länge stacken inte är tom,
    [ai,bi,Ii,toli] = pop;      % hämta intervall
    m = (ai+bi)/2;              % dela på mitten
    I1 = trap(ai,m);            % integrera över halvorna
    I2 = trap(m,bi);
    Isum = I1 + I2;
    corr = (Isum-Ii)/3;          % Extrapolera
    if abs(corr) < toli          % om fel < tol
        Integ = Integ + Isum + corr; % ackumulera
    else                          % annars
        push([ai,m,I1,toli/2]); % lägg halvorna på stack
        push([m,bi,I2,toli/2]); % med halverad tolerans
    end
end
end
```


F6

- Trunkeringsfelsuppskattning:
- Richardson-extrapolation
- Felfortplantning: linearisering, instängning

Ö3

F7

- System av ODE - initialvärdesproblem
- Existens & entydighet, Lipschitz
- Euler, konvergens, fel, konvergensordning
- Lösningsskaror, fasrum
- Stabilitet, känslighet
- Högre ordn. ekvation till första ordn. system
- Runge-Kutta-metoder, steglängdsreglering
- Styva ekvationer & Implicita metoder

Ö4

F8

- Randvärdesproblem
- Inskjutning – generellt
- Differensmetod
- formuleringar

Ö5

F9

F10

Ö6

F11

F12

- Repetition
- Gamla tentor
- ?