

Värmeledning i chip

Ett chip på ett kretskort värms inifrån och kyls av konvektion i en omgivande fluid. Vad blir stationära temperaturfördelningen, och hur lång tid tar det att nå stationaritet? Hur påverkar chipets dimensioner max-temperaturen?

Modell

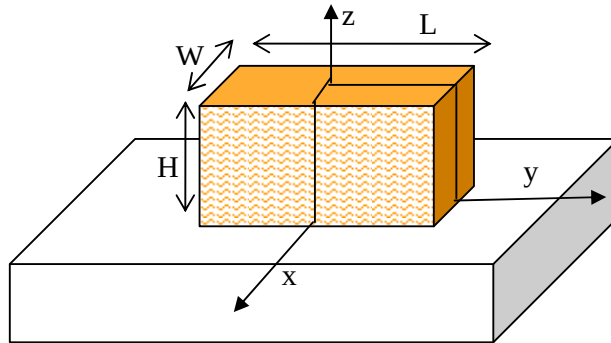
Den matematiska modellen är ett initial-randvärdesproblem för värmelednings-ekvationen, att bestämma $T(\mathbf{r}, t)$ för $t > 0$ när

$$\begin{aligned}\rho C \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot (k \nabla T) + Q \text{ in } \Omega \\ k \frac{\partial T}{\partial n} &= h(T_{\text{ext}} - T) \text{ on } \partial\Omega \\ T(\mathbf{r}, 0) &= f(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (1)$$

ρ är masstätheten [kg/m^3], C specifika värmekapaciteten [$\text{J}/(\text{kg K})$], k värmeledningstalet [$\text{W}/(\text{m K})$] och Q värmekällan [W/m^3]. T_{ext} är omgivningstemperaturen och h konvektions-värmeövergångstal [$\text{W}/(\text{K m}^2)$] mellan chip-yta och omgivning.

Vi gör några förenklande antaganden

1. Ingen värmetransport till kortet;
2. Konstant värmeövergångstal h på alla de andra sidorna.
3. Uniform värmekälla Q
4. Chipet är tunt och långsmalt, $H \ll W \ll L$, och vi studerar inverkan av tunnheten nedan. I fortsättningen räknar vi på en $H \times (W/2) \times (L/2)$ del av chipet.



Data för kisel: $\rho = 2300 \text{ kg}/\text{m}^3$, $C = 380 \text{ J}/\text{kg K}$, $k = 3.6 \text{ W}/\text{m K}$. Totala effekten är $P \text{ W}$, dvs.

$Q = \frac{P}{V} \text{ (W}/\text{m}^3)$ där V är chipets volym. Värmeövergångstalet h med en svag fläkt är h_{coef} (t ex $100 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$) och $T_{\text{ext}} = 20^\circ\text{C}$.

Förberedande analys

a) Symmetrin gör det tillräckligt att räkna på 1/4 chip. Bevis: Anta att lösningen är unik, säg $T(x, y, z, t)$. Visa att $T(-x, y, z, t)$ och $T(x, -y, z, t)$ också är lösningar.

b) En viktig karakteristisk storhet är Biot-talet $Bi = \frac{h}{k/d}$, kvoten mellan värmemotståndet $1/h$

för konvektionen och d/k för chipet självt; d är en karakteristisk längd för värmetransporten genom chipet. Här är det H , den minsta dimensionen. När Bi är stort blir yttemperaturen nära T_{ext} , och när Bi är litet, blir temperaturen nästan uniform i kroppen.

c) Vad blir temperaturen när Bi (dvs. h) är litet?

d) Antag att chipet efter att ha varit på länge stängs av vid $t = 0$ så $Q = 0$ för $t > 0$. Newtons kylningslag, ofta använd i deckare att bestämma tidpunkten för dödsfallet, är

$$\tau \frac{dT}{dt} = T_{\text{ext}} - T$$

som är gränsfallet för försvinnande Bi .

e) Vad blir tids-skalan τ för chipet? Tips: Utgå ifrån PDE (1), integrera överhela chipet och använd Gauss' sats. Använd att T är nästan konstant.

f) Härled en liknande modell för uppvärmningen när chipet slås på igen.

Vid lab-tillfället

Modell: Använd 3D, Classical PDEs/Heat Equation. Det lönar sig att definiera materialparametrarna som Constant under Options, så kan man enkelt ändra värden etc., och ekvationerna får begripliga termer.

Geometri: ett rätblock! ge det rätt dimensioner under properties

PDE: sätt värdet på k och Q (som heter f)

Randvillkor: Neumann-villkor: Isolering på botten och symmetri-ränder fås av $q_n = q = 0$. På locket med q och källterm g som $hcoef$ och $hcoef * Text$ – dessa kan man först definiera som Constant under Options.

Lösare: Stationary linear, utom för transient-körningarna (e) som görs med Time Dependent. Välj sluttid med ledning av framräknad tids-skala.

(a) Beräkna max-temperaturen då

$$\begin{aligned} P &= \text{åå} & W \\ hcoef &= 20 \text{ dd} & W/m/K \\ W &= 5 + \text{mm}/2 & \text{mm} \end{aligned}$$

där laborantens födelsedatum är åå mm dd. Om

(b) För $W = 10$ mm, gör nätförfiningsstudie och prova P2 och P1 – element.

(c) Plotta temperaturprofiler och finn max-temperaturer för $W = 10, 1, 0.2$ mm

(d) Härled för $h = \text{infinity}$ det ungefärliga värdet $T_{\max} = H^2 Q / (2k)$. Är detta månne en övre

eller undre gräns? Tips: Differentialekvationen förenklas till

$$0 = k \frac{d^2 T}{dz^2} + Q, \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = 0, T(h) = T_{\text{ext}}$$

(e) Frågan ”Går det lika fort att värma upp som att kyla ner?” är oprecis. Precisera, observera och motivera. Det är enklast att köra en simulering med start- $T = T_{\text{ext}}$, påslag av Q vid $t = 0$ och avslagning efter så lång tid att temperaturen blivit (nästan) stationär:

$$Q = (t < t_{\text{slut}}) * Q_0$$

(f) Temperaturen kan minskas av kylflänsar. Låt chip-oktanten vara $10 \times 10 \times 2$ mm³. Lägg ett 1 mm tjock aluminiumlock på chipet, därefter 5 st. 1 mm tjocka och 1 cm höga kylflänsar:

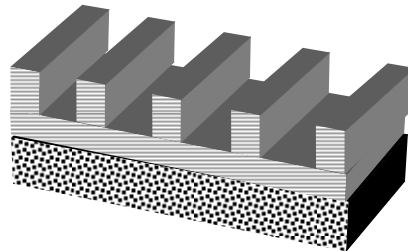
Data för aluminium: $\rho = 1600$ kg/m³,
 $C = 380$ J/kg/K, $k = 60$ W/m/K

Hur mycket minskas max-temperaturen av kylflänsarna?

Lönar det sig att göra flänsarna högre och/eller tunnare och flera? Tanke: Totala ytan exponerad mot luften är en viktig parameter i modellen (se

(a) ovan). Då borde man komma undan med bara en smula Al genom att göra många tätt packade tunna flänsar. Men så ser inte chipkylare ut. Varför? Vad är det för fel på vår modell?

Geometri: Man skapar först locket som en tegelsten och placerar det med ifyllning av rätt geometridata under Draw/Object Properties; Sedan gör man yttersta flänsen, placerar den; därefter kopierar man den och ger rätt translation i dialogrutan (4 ggr). Skapa en Composite Object av unionen av alla flänsarna och locket utan interior borders. Till slut: gör ett sammansatt objekt av flänslock och chip, med behållna interior borders. Klart!



PDE: Sätt materialdata och initialdata i de två Subdomains (Al och Si).

Randvillkor: Välj Neumann för alla ränder och sätt värmeövergångstal q och källterm g som `hcoef` och `hcoef*Text` – dessa kan man först definiera som `Constant` under `Options`. Ändra därefter (de få) symmetri-ränderna till isolering.

Exact solutions

Now consider a case with $Bi = \infty$, $L = \infty$. The problem becomes two-dimensional (x, z) . First, the steady-state:

(1) Write the exact solution, by separation of variables, etc., etc. You will find

$$T = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} u_{mn}(x, z), u_{mn} = X_m(x) \cdot Z_n(z) = \cos((2m+1)\pi x / W) \cos((2n+1)\pi z / H)$$

and that $c_{mn} = O(m^{-3}, n^{-3})$ so the series converges rapidly.

The transient problem has initial data $T(x, z) = 0$ at $t = 0$ when Q is switched on. Use the separation of variables ansatz

$$T = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}(t) u_{mn}(x, z)$$

to derive the differential equations

$$\frac{d}{dt} c_{mn} + \lambda_{mn} c_{mn} = f_{mn}, c_{mn}(0) = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

and their exact solution. An illustrative way of writing the equations is

$$\tau_{mn} \frac{d}{dt} c_{mn} = \frac{f_{mn}}{\lambda_{mn}} - c_{mn}, \quad \tau_{mn} = 1 / \lambda_{mn}$$

which shows the time-scale (τ) and the final value (f/λ), the latter is of course the c_{mn} you computed in (1).

(2) Plot the evolution of the temperature profile. How long does it take to reach steady state?

The λ_{mn} and f_{mn} have been computed in (1).