

DN12- 12, 14, 15, 40, 41,43 Lösningsförslag till tentamen i Numeriska metoder gk
Onsdagen den 11 mars 2009, kl. 9.00 - 12.00

DEL 2, 50p Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd.
Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

(10p)

1. a) Vilket problem uppstår och hur kan man åtgärda det?
Då man sätter in startvärdena $x = 0$ samt $y = 0$ i Jacobimatrisen för problemet blir den:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs matrisen är singulär och därmed inte inverterbar.

b) Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för ekvationsproblemet så att det kan lösas. Visa att det problem som uppstod i a) inte uppstår nu.

Newton's metod:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_n - \mathbf{h}_n, \quad \mathbf{J}\mathbf{h}_n = \mathbf{f}(x_n, y_n), \quad \mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$$

Skriv funktionen $\mathbf{f}(x_n, y_n)$ på standardform

$$\mathbf{f}(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} 3x_n y_n + y_n^2 - x_n^2 \\ y_n \cos(\pi x_n) + x_n^2 + 3 - y_n^2 \end{pmatrix}$$

Jacobimatrisen erhålls och med startvärdena $x_0 = 1$ samt $y_0 = 1$ blir den

$$J = \begin{pmatrix} (3y_n - 2x_n) & (3x_n + 2y_n) \\ (-\pi y_n \sin(\pi x_n) + 2x_n) & (\cos(\pi x_n) - 2y_n) \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

dvs matrisen är inte singulär och inverterbar.

c) Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett Matlab-program

```
hnorm = 1; tolerans = 1e-5;
iter = 1; z = [1 1]';

disp('   iter      x      y   ')
while (hnorm > tolerans) & (iter < 20)
    x = z(1); y = z(2);
    hnormOld = hnorm;
    f = [(3*x*y + y^2 - x^2);
         (y*cos(pi*x) + x^2 - y^2 + 3)];
    J = [(3*y - 2*x) (3*x + 2*y)
         (-pi*y*sin(x*pi) + 2*x) (cos(pi*x) - 2*y)]
    h = J\f;
    hnorm = norm(h,inf);
    K = hnorm/hnormOld^2;
    disp([iter z'])
    z = z - h;
    iter = iter + 1;
end
z
```

(16p)

2. a) Skriv om differentialekvationssystemet ovan så att ett första ordningens differentialekvationssystem erhålls. Ange tillhörande villkor.

Sätt $u_1 = y$, $u_2 = y'$ och $u_3 = z$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ x^2 - u_2 + 2u_3 \\ x u_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b) Använd Eulers metod och utför 2 iterationer med handräkning. Använd $C = 10$ och $h = 1$.

Eulers metod:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h \mathbf{f}(\mathbf{u}_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

Första iterationen:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 10 \\ (-1)^2 - 10 + 2 * 1 \\ -1 * 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_0 + h = -1 + 1 = 0$$

Andra iterationen:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 - 3 + 2 * 1 \\ 0 * 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 + h = 0 + 1 = 1$$

- c) Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett Matlab-program

```
x0 = -1; xslut = 1;
```

```
for i = 1:4
```

```
    C = 10*i;
```

```
    u = [0 C 1]';
```

```
    [X U] = ode45(@fode, [x0 xslut], u);
```

```
    subplot(2,2,i)
```

```
    plot(X, U(:, [1, 2]))
```

```
    grid
```

```
    title(num2str(C))
```

```
% d) uppgiften; start
```

```
hold on
```

```
while U(end,2) <= U(end,1)
```

```
    [X U] = ode45(@fode, [X(end) X(end)+1], U(end,:));
```

```
    plot(X, U(:, [1, 2]))
```

```
end
```

```
% d) uppgiften; slut
```

```
end
```

- d) Utöka programmet/algoritmen

Lösningsförslag finns i koden ovan.

(10p)

3. Använd följande Taylorutvecklingar:

$$y_1 \approx y + h y' + \frac{h^2 y''}{2!} + \frac{h^3 y'''}{3!} + \dots$$

$$y_2 \approx y + 2h y' + \frac{(2h)^2 y''}{2!} + \frac{(2h)^3 y'''}{3!} + \dots$$

Taylorutvecklingarna sätts in i:

$$\begin{aligned} \frac{-5y_0 + 8y_1 - 3y_2}{2h} &\approx \\ &\approx \frac{1}{2h} \left(-5y + 8(y + h y' + \frac{h^2 y''}{2!} + \dots) - 3(y + 2h y' + \frac{(2h)^2 y''}{2!} + \dots) \right) \\ &= \frac{1}{2h} \left((-5 + 8 - 3)y + h(8 - 3 \cdot 2)y' + \frac{h^2}{2!}(8 - 3 \cdot 2^2)y'' + \dots \right) \\ &= y' - h y'' - \frac{4h^2 y'''}{3} + \dots \end{aligned}$$

Första termen y' ger $n = 1$ och andra termen $h y''$ ger $p = 1$.

(14p)

4. a) Skriv om problemet till ett linjärt ersättningsproblem.

Lösning:

$$z = \frac{1}{y} = \frac{b + c \sin(kx) + d \cos(kx)}{a}$$

b) Beräkna b , c och d med minstakvadratmetoden då $a = 1$ och $k = 2\pi$.

Lösning:

$$z = b + c \sin(2\pi x) + d \cos(2\pi x)$$

leder till det överbestämda systemet $A \mathbf{k} \approx \mathbf{z}$ dvs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Normalekvationerna, $A^T A \mathbf{k} = A^T \mathbf{z}$ blir:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Vilket ger $b = -1$, $c = 2$ och $d = 5$.

c) Ställ upp formler för och beräkna residualen och felkvadratsumman.

$$residual = y - A \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$felkvadratsumma = residual' * residual = 4$$

d) Vad är det som minimeras när man använder minstakvadratmetoden?

Felkvadratsumman.