

Värmeledningsproblem: Skivbromsen

Så här kan en skivbroms se ut. Vi försummar värmetransport genom yttre- och inner-kanter och kan då göra en 2D-modell av ena halvan (symmetriplan). Skivan är av kolstål, $2d = 1$ cm tjock, $2Ro = 0.3$ m diameter, axelhål $2Ri = 0.05$ m diameter, och klossytan A är $a \times b = 8 \times 5$ cm² placerad $c = 5$ cm från axelhålet. Densiteten är $\rho = 7800$ kg/m³, värmeledningskoefficienten $k = 50$ [W/K/m²], specifika värmekapaciteten $C = 434$ [J/kg/K].

Uppvärmning och avkylning:

Klossarna klämmer mot skivan med kraft F . Om friktionskoefficienten är μ (t ex = 0.8) blir effekttätheten [W/m²]

$$Q = \frac{\mu F}{A} \cdot \omega r, r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (polärt koord. system)} \quad (1)$$

i varje punkt (x,y) i klossens kontaktyta. Totala effekten [W] blir

$$P(\omega) = \omega \frac{\mu F}{A} \int_A r dx dy = \alpha F \omega, \alpha = \mu \cdot r_{av}, r_{av} = \frac{1}{A} \int_A r dx dy$$

där r_{av} är aritmetiska mediet av r över klossytan A .

Vi förenklar modellen lite genom att istället använda effekttätheten Q_{av} som är *konstant* över klossytan,

$$Q_{av} = P(\omega)/A = \alpha F \omega / A$$

Skivan kyls av luften med effekttätheten $h(T - T_{ext})$ [W/m²] över resten

$S - A$ av skivytan där $h = 100$ W/m²/K, $T_{ext} = 300$ K.

Inbromsningen att simulera:

Antag att man under tiden t_0 med fyra lika belastade skivbromsar med konstant F bromsar en bil, massa m , som kör v_0 m/s. Vid hastighet v snurrar skivorna med $\omega = v/D$ rad/sek (hjulradie D). Bromseffekten blir då $8P$ och

$$1/2 m dv^2/dt = -8F\alpha(v/D) \text{ (enligt Newton)} \quad (2)$$

Därmed kan vi bestämma F och hur ω och effekten Q beror av t . Temperatur-fördelningen i den snurrande skivan beskrivs så av

$$d\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}(x,y,t) \cdot \nabla T \right) = d\nabla \cdot (k \nabla T) + \begin{cases} -h(T - T_{ext}) & \text{i } S - A \\ Q_{av}(t) = \frac{\alpha F}{A} \omega(t) & \text{i } A \end{cases}$$

$$k \nabla T \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ på ränderna } r = Ri \text{ och } r = Ro$$

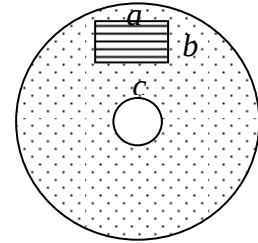
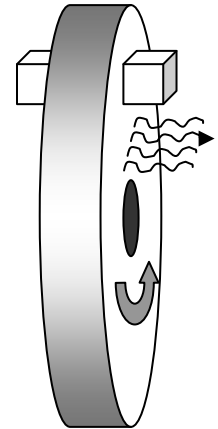
$$T(x,y,0) = T_{ext}$$

där hastighetsfältet i den som stel kropp snurrande skivan är

$$\mathbf{u} = \omega(t)(-y, x) \quad (3)$$

i det bil-fixa (x,y) -systemet. Uppgiften är att göra en film av temperaturfördelningen under inbromsningen och en stund efter, $0 < t < 5t_0$

Läs hela lab-texten! Den ekvation vi implementerar finns på nästa sida och har mycket färre parametrar som räknas ut från dem som ges här. Jobba på lab-tillfället med att få den ekvationen



(med tillhäftade värden på ω , C1, C2) att fungera. Sedan kan man med papper och penna göra analysen, stoppa in formlerna i comsol-modellen – använd `options/constants` och `options/expressions` – och köra de simuleringar och nätförfiningar etc. som efterfrågas.

Förberedande analys, görs ev. efter första labtillfället

1. Förklara (1), (2) och (3) och lös (2) – även för $t > t_0$!
2. Vi ska beräkna α . Som man snart märker blir formlerna formidabla (Prova!), så vi gör det med Comsol på lab-tillfället. r_{av} kan man lätt uppskatta. Använd det att kontrollera Comsol-siffran mot.

3. Om man inför dimensionslösa variabler ("primmade") för temp. och längder

$$x' = x/L, y' = y/L, T' = (T - T_{ext})/T_0$$

och väljer skalorna L (längd) och T_0 (temp.) lämpligt reduceras modellen till

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \omega y' T'_{x'} + \omega x' T'_{y'} - C_1 \Delta T' = \begin{cases} -C_2 T' & \text{utanför klossen} \\ \omega & \text{"under" klossen} \end{cases}$$

$$\partial T' / \partial n' = 0 \text{ på ränderna } r = Ri / L \text{ och } r = 1$$

$$T'(x', y', 0) = 0$$

där längdskalan L tydligen redan valts = R_0 . Välj temp-skalan T_0 och beräkna C_1 , C_2 , uttryckta i parametrarna ovan.

4. För fråga 4 nedan behövs analytisk behandling. Här integreras ekvationen över hela $S + A$. Motivera

- a) med Gauss' sats hur det blir så, och
b) varför de markerade termerna försvinner.

Du behöver för *)-termen använda Gauss' sats och att $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, så visa det först. Ytelementet $dx dy$ kallas här $d\Omega$.

$$d\rho C(\frac{\partial}{\partial t} \int Td\Omega + \int \mathbf{u}(x,y,t) \cdot \nabla Td\Omega) = d \int k \nabla T \cdot \mathbf{n} ds - h(\int_{S-A} Td\Omega - (S-A)T_{ext}) + \int_S Qd\Omega$$

$$0 = -h(\int_{S-A} Td\Omega - (S-A)T_{ext}) + \int_P Qd\Omega$$

Vid lab-tillfället

Modell: 2D plan, mod Heat Conduction, transient och de förinställda Lagrange-P2-elementen.

Geometri: Två cirklar E1 och E2 och en rektangel R1 ger E1-E2+R1 att räkna på. Behåll interior boundaries, annars försvinner bromsklossen. Två subdomäner, en för klossen (A) och en för skivan utanför (S-A).

PDE: Definiera alla parametrarna och C_1 C_2 som konstanter (options/constants). Det går bra att skriva uttryck. Fyll i under physics/subdomain settings, koefficienter, hastigheter, initialdata. För tidsvariabelt ω behövs kanske en särskild options/expressions/global expressions.

Randvillkor: physics/boundary settings Längs ytterranden isolering, finns som förval att klicka i.

1-5 för stationära fördelningen, man bromsar och gasar så farten inte minskar.

1. Gör initial-nät, förfin trianguleringen (minst) två ggr och registrera max-temperaturerna för de tre beräkningarna. Vad blir konvergensordningen? Är det ett bra sätt att bestämma noggrannhetsordning? Blir det några singulariteter i lösningen?

2. Byt till P1-element ("Lagrange-Linear"). Vad blir ordningen nu?

3. Beräkna α med Post processing/Subdomain integration.

4. Vad är temperaturens medelvärde utanför A, $\frac{1}{S-A} \int_{S-A} T dx dy$? Beräkna med comsol och kontrollera mot analytisk approximation.

5. Finn parametervärden som ger olika utseende på stationära temp.fördelningen.

- a) nästan rotationssymmetrisk, varmast i en ring mitt på skivan.
- b) en "komet" med huvud under klossen och krökt svans
- c) nästan jämn temperatur.

6 För transient lösning, välj transient under solver/solver parameters

Prova ultra-snabb bromsning och långsam, finn en bromstid som ger en "komet"-temperatur när bilen stannat.