DN1240 mfl
Tentamen i Grundkurs i numeriska metoder
Del 1 (av 2)
Fiktiv tentamen till NUMFCL10

Skrivtid 3 tim. **Inga hjälpmedel.** Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange dina giltiga bonuspoäng från ht10 eller vt10 och den kursomgång (program, termin) där poängen erhållits. Maximal poäng 20 + bonuspoäng från årets laborationer (max 4p).

(2p) 1. Givet $y(2) = 4$ och $y(7) = 2$. Värdet $y(5)$ beräknat med linjär interpolation blir ...

- ☐ 2.7
- ☐ 2.5
- ☐ 2.8
- ☐ 2.0
- ☐ 3.0
- ☐ 3.5

(3p) 2. Givet differentialekvationerna (prim betyder derivering med avseende på x)

$$y'' = 2x^2 y - z' \qquad z'' = 2y - z(z')^2$$

där $y = z = y' = z' = 1$ då $x = 1$. Om man använder Eulers framåt-metod med steglängden $k = 0.2$,

...vad skattas då $z(1.2)$ till? (1.5p)

- ☐ 1.02
- ☐ 1.04
- ☐ 1.10
- ☐ 1.20
- ☐ 1.21
- ☐ 1.44

...vad skattas då $z'(1.2)$ till? (1.5p)

- ☐ 1.02
- ☐ 1.04
- ☐ 1.10
- ☐ 1.20
- ☐ 1.21
- ☐ 1.44

(2p) 3. En metod för ekvationslösning till $f(x) = 0$ har genererat en serie x_n-värden med de successiva skillnaderna 0.01, 0.001, 10^{-5}, 10^{-9},... Vad kan vi säga om metodens konvergens?

- ☐ Ingenting
- ☐ Det är linjär konvergens
- ☐ Det är kvadratisk konvergens
- ☐ Det är kubisk konvergens
- ☐ Det är en annan typ av konvergens
- ☐ Den är inte konvergent

(2p) 4. Givet ekvationen $x^4 + \mathrm{e}^{x-100} = 16$ där $\mathrm{e}^{-100} \approx 4 \cdot 10^{-44}$

En bra startgissning till en rot är

- ☐ 0
- ☐ 0.1
- ☐ 2
- ☐ 16
- ☐ 1.21
- ☐ 1.44

(2p) 5. Trapetsregeln för beräkning av en integral har noggrannhetsordning 2. Detta betyder grovt att...

- ☐ Felet är litet
- ☐ Felet avtar med steglängden
- ☐ Antalet korrekta decimaler kvadreras
- ☐ Felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat
- ☐ Felet avtar en faktor 2 då steglängden halveras

(2p) 6. Givet följande ordinära differentialekvation $\frac{du}{dt} = u\,(u-2)$. Vilken eller vilka av dessa funtioner är en stationär och stabil lösning till differentialekvationen?

- ☐ e^{-t}
- ☐ $u = 1/t$
- ☐ $u = 1/2$
- ☐ $u = 0$
- ☐ $u = 2$
- ☐ $u = t$
- ☐ e^{t}

(3p) 7. Givet tabellen

t	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
f	2.664	2.691	2.718	2.746	2.773

för en funktion $f(t)$. En approximation till $f'(0.99)$ är

- ☐ 0.27
- ☐ 0.54
- ☐ 1.0
- ☐ 2.7
- ☐ 5.4
- ☐ 27
- ☐ 54

(2p) 8. En grov approximation till

$$\int_{1.0}^{1.5} \frac{dx}{x^2 + 0.01\cos\left(x^2\right)}$$

är...

- ☐ 0.33
- ☐ 0.66
- ☐ 1.0
- ☐ 3.3
- ☐ 6.6
- ☐ 33
- ☐ 66

(2p) 9. Om differentialekvationen ser ut som $\frac{df}{dt} = f(t,u)$. Vilken av följande formler är korrekt för Eulers bakåt-metod (också kallad implicta Euler) med tidssteget k?

- ☐ $u_{n+1} = u_n + f(t_{n+1}, u_{n-1})$
- ☐ $u_{n+1} = u_n + k\,f(t_{n+1}, u_{n-1})$
- ☐ $u_{n+1} = u_n + f(t_{n+1}, u_n)$
- ☐ $u_{n+1} = u_n + k\,f(t_{n+1}, u_n)$
- ☐ $u_{n+1} = u_n + f(t_{n+1}, u_{n+1})$
- ☐ $u_{n+1} = u_n + k\,f(t_{n+1}, u_{n+1})$
- ☐ Ingen av ovanstående formler är Eulers bakåt-metod

CSC (NADA)

DN1240, Exempeltentamen i Numeriska Metoder
Del 2

(8) 1. Vid numerisk beräkning av en integral med en ny smart stegmetod erhölls följande approximativa integralvärden $I(h)$ för några olika steglängder h.

h	0.4	0.2	0.1	0.05
I	2.8725600	2.3101600	2.2400100	2.2312506

Bestäm noggrannhetsordningen för metoden.

(12) 2. Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för följande problem.

$$\begin{aligned} 15x + y - z^2 &= 30, \\ -z - x + 30y &= 30, \\ -x^2 + 100z + y &= 20. \end{aligned}$$

Bestäm en grov startapproximation, och formulera det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen. Uttryck med siffervärden insatta räcker. Beskriv en algoritm, gärna i form av ett Pythonprogram, som löser det ursprungliga problemet med Newtons metod, och med fel mindre än 10^{-9} i varje komponent av lösningen. Om du inte har lyckats bestämma en startapproximation får du här hitta på någon.

(8) 3. Man vill använda Jacobis metod på det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10, \\ 10x_2 + x_3 &= 12, \\ x_1 + 2x_2 + 20x_3 &= 24. \end{aligned}$$

Genomför en iteration med Jacobis metod på systemet. Du kan använda $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ som startgissning.

(12) 4. Funktionerna $u(t)$ och $v(t)$ satisfierar

$$\begin{aligned} &u' + v^2 u = sin(t), \quad v' + u^2 v = sin(2t), \\ &u(0) = 1,\ v(0) = -0.2. \end{aligned}$$

Beskriv en algoritm, gärna i form av ett Pythonprogram, som beräknar lösningen för $0 \leq t \leq 2$.

Modifiera eller utöka därefter algoritmen/programmet så att även

$$\int_0^2 \big(u(t)^2 + v(t)^2\big)dt$$

beräknas.

Var god vänd!

(12) 5. Antag att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är Lipschitz-kontinuerlig med Lipschitzkonstant L, och även uppfyller $|f(u)| \leq M$, för alla $u \in \mathbb{R}$. Låt $\bar{u}$ vara resultatet av ett Euler framåt-steg med steglängd k från en given startpunkt u_0. Låt $\hat{u}$ vara resultatet av två Euler framåt-steg med halva steglängden, $k/2$, från samma utgångspunkt u_0. Visa att

$$|\bar{u} - \hat{u}| \leq \frac{LM}{4} k^2.$$