

Tentamensförberedelse

Johan Jansson

December 8, 2010

Plan och Syfte

- Exempeluppgifter / frågor

Använd modulerna för att förstå hur man kan lösa uppgifterna.

del 1 på tavlan

Exempeluppgift: 1 (del 2) (använd Modul 1/2)

Feluppskattning för u beräknat med tidssteg k och \bar{u} beräknat med tidssteg $\frac{k}{2}$:

$$|u - \bar{u}| \leq \frac{LT}{2}k$$

(även för skillnad mot minskande tidssteg, med annan konstant)

Generellt kan vi säga:

$$|u - \bar{u}| \leq Ck^p$$

Vi tittar alltså på skillnaderna och försöker bestämma p :

$$d_1 \approx 2.87 - 2.31 = 0.56$$

$$d_2 \approx 2.31 - 2.24 = 0.07$$

$$d_3 \approx 2.24 - 2.23 = 0.01$$

Varje halvering av k ger ca. en faktor $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$

Alltså kan vi uppskatta att metoden är av ordning 3.

Exempeluppgift: 2 (del 2) (använd Modul 5)

$$f(x) = 0$$

där f och x är vektorvärda (arrayer).

Newtons metod:

$$Jx_{i+1} = Jx_i - f(x_i)$$

$$J = f'(x)$$

```
def newton(f, x0):
    def g(x):
        # Compute the Jacobian: f'(x)
        J = jacobian(f, x)
        # Compute right hand side of Newton
        # iteration and solve the linear system.
        r = dot(J, x) - f(x)
        return linear_solve(J, r)

    return fixedpoint(g, x0)

def fixedpoint(g, x0):
    TOL = 1.0e-10
    while(diff > TOL):
        y = g(x)
        diff = max_norm(y - x)
        x = y

def f(x):
    ...

x0 = zeros(3)
x = newton(f, x0)
```

Exempeluppgift: 3 (del 2) (modul 5)

Vi ska ta en iteration av Jacobis metod på det linjära ekvationsystemet $Ax = b$ med:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 20 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Vi definierar D som diagonalen av A och $M = A - D$. Jacobis metod kan då formuleras som:

$$x_1 = D^{-1}(-Mx_0 + b)$$

där 1 och 0 är iterationsnummer.

Vi väljer $x_0 = (1 \ 2 \ 3)^\top$, vi har då att

$$x_1 = D^{-1}(-Mx_0 + b) = \left(\frac{4}{10} \quad \frac{9}{10} \quad \frac{19}{20} \right)^\top$$

Exempeluppgift: 4 (del 2) (modul 3)

Vi vill lösa begynnelsevärdesproblemet: $\dot{u} = f(t, w)$

$$w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\dot{w} = f(t, w) = \begin{pmatrix} f_0(t, w) \\ f_1(t, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_1^2 w_0 + \sin(t) \\ -w_0^2 w_1 + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Formulera `timestep()` och `solve()` från modul 3 och anropa `solve()` med $f(t, w)$.

För att beräkna integralen $\int_0^2 (u(t)^2 + v(t)^2) dt$ kan vi skriva:
 $f_{energy}(t, z) = (u(t)^2 + v(t)^2)$ där vi stoppar in de beräknade lösningarna $u(t)$ och $v(t)$, genom exempelvis en funktion som `piecewise_linear_adapter()`. Sedan anropar vi `solve()` med $f_{energy}(t, z)$ för att beräkna integralen.

Exempeluppgift: 5 (del 2) (modul 1)

Se modul 1 eller kapitel 75: Proof of the Fundamental Theorem.