Fundamental satsen ... igen

- f Lipschitz kont på intervallet $[t_1, t_2]$:

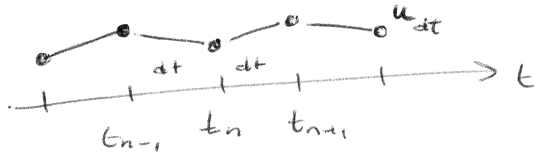
  $$|f(s) - f(t)| \le L|s-t| \quad \text{för alla } s,t \in [t_1, t_2].$$

- Fundamentalsatsen: om f Lipschitz på $[0,T]$, då är ~~funktionen~~ $u(t) = \int_0^t f(s)\,dt$ lösning till DE:

  $$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t), & t \in [0,T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

- $u(t) = \int_0^t f(s)\,dt$ definieras genom tidsstegning

  $u_B^{n+1} = u^n + f(t_n)\,dt$ med försvinnande litet tidssteg dt.



I intervallen $[t_n, t_{n+1}]$ definieras u_{dt} som en linjär funktion.

- $u(t)$ uppfyller DE $\dot{u}(t) = f(t)$ därför att residualen $\dot{u}_{dt}(t) - f(t)$ kan göras godtyckligt liten genom att minska tidssteget dt:

för $t \in [t_n, t_{n+1}]$: $$|\dot{u}_{dt}(t) - f(t)| = \left|\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - f(t)\right| = |f(t_n) - f(t)| \le L|t - t_n| \le \boxed{L\,dt}$$

- Nyckel: definition av $u_{dt}(t)$ som styckvis linjär funktion på intervallen $[t_n, t_{n+1})$!