

$$\begin{aligned} \text{ODE} \quad & \begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t)) \\ u(0) = u^0 \end{cases} \end{aligned}$$

Frågestegning: $u((n+1)h) = u(nh) + f(u(nh)) \cdot h$

- Kan vi beräkna lösningen till ODE
genom frågestegning med godtyckligt
närgränshet? (f Lipschitz kontinuerlig)

Skallnad mellan att ta ett steg eller
längd h och 2 steg eller längd $\frac{h}{2}$?

1. För samma $u(nh)$:

$$\left| u((n+1)h) - \tilde{u}((n+1)h) \right|$$

$$\begin{aligned} &= \left| u(nh) + h f(u(nh)) - \left(u(nh) + \frac{h}{2} f(u(nh)) + \frac{h}{2} f(u(nh) + \frac{h}{2} f(u(nh))) \right) \right| \\ &= \frac{h}{2} \left| f(u(nh)) - f(u(nh) + \frac{h}{2} f(u(nh))) \right| \\ &\leq \frac{h}{2} L \left| u(nh) - \left(u(nh) + \frac{h}{2} f(u(nh)) \right) \right| = \boxed{\frac{h^2}{4} L^2 f(u(nh))} \end{aligned}$$