Skalär ODE: hitta $u(t)$ så att

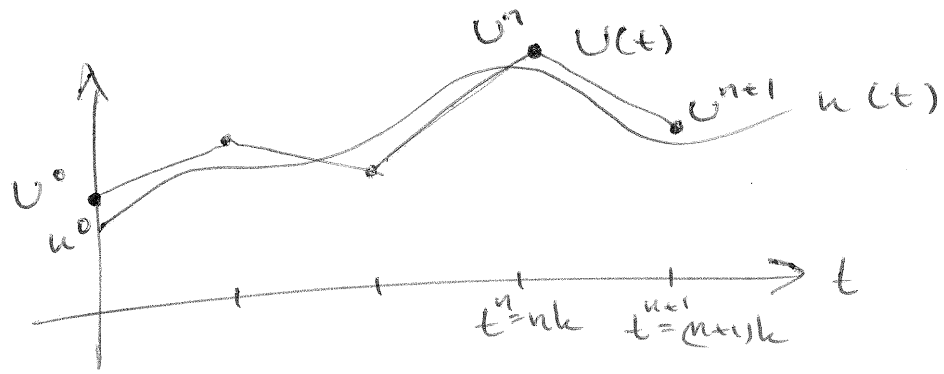
$$\begin{cases} \dot{u}(t) + A\,u(t) = F(t), & t>0 \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

A konstant, $F(t)$ given funktion.

Trapetsmetod: hitta $U^n = U(nk)$ så att

$$U^{n+1} + \frac{k}{2}(AU^{n+1} + AU^n) = U^n + \int_{I_n} F(t)\,dt, \quad n=1,2,\dots$$

$I_n = (nk, (n+1)k)$, $U^0 \approx u^0$



Residualen $R(U) \equiv \dot{U} + AU - F$

(För exakt lösning $u(t)$ $\Rightarrow$ $R(u) = 0$)

Dualt problem: $\begin{cases} -\dot{\varphi} + A\varphi = 0 & T>t\geq 0 \\ \varphi(T) = \pm 1 = \operatorname{sgn}(e(T)) \end{cases}$

Felet $e = u - U$, tiden "går bakåt".

Felrepresentation:

$$\boxed{|e(T)| = -\int_0^T R(U)\varphi\,dt + e(0)\varphi(0)}$$

Låt $\bar{\varphi}$ vara medelvärdet av φ över varje tidsintervall I_n:

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{1}{k}\int_{I_n} \varphi(s)\,ds, \quad \text{för } t\in I_n$$

$\bar{\varphi}$ konstant på varje tidsintervall I_n

Vi har att $\int_{I_n} R(U)\,dt = 0$ för $n=0,1,2,\dots$

$$\Rightarrow \int_{I_n} R(U)\bar{\varphi}\,dt = 0 \quad \text{för } n=0,1,2,\dots$$

$$\Rightarrow \int_0^T R(U)\bar{\varphi}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow |e(T)| = -\int_0^T R(U)(\varphi - \bar{\varphi})\,dt + e(0)\varphi(0)$$

$$\Rightarrow |e(T)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} R_n \int_{I_n} |\varphi - \bar{\varphi}|\,dt + |e(0)||\varphi(0)|$$

med $R_n(U) \equiv \max_{t\in I_n} |R(U(t))|$