Partiella differentialekvationer: Koppling Diskret - Kontinuum och Finita Elementmetoden

Johan Jansson

November 29, 2010

Table of contents

Plan och Syfte

Titta på kopplingen kontinuum/rumsderivata - diskret/partikelmodell (vågekvation och mass-fjäder)

Visa att mass-fjädermodellen representerar en rumsderivata
Diskret $\Rightarrow$ Kontinuum

Introducera finita elementmetoden (FEM)
Kontinuum $\Rightarrow$ Diskret

Knyta ihop flera moment i kursen till ett sammanhang: styckvisa linjära funktioner definierade av basfunktioner på ett nät/mesh (M2), kvadratur/integrering (M2) och tidsstegning (M1/M3) knyts ihop för att definiera finita elementmetoden. Vi kommer att jämföra med vågekvation/mass-fjäder (M4).

Att läsa (referenser)

- Elastisk sträng - ekvivalens mellan mass-fjädermodell och vågekvation (ch. 45)
- Partiella differentialekvationer, finita elementmetoden (ch. 149-150)

Koppling rumsderivata och mass-fjädersystem

Syfte:
Diskret $\Rightarrow$ Kontinuum

Att se att mass-fjädermodellen representerar en rumsderivata, vilket gör att vi kan beskriva ekvationen mer kompakt som en partiell differentialekvation (vågekvationen).

- Vi har tittat på diskretisering av differentialekvationer i tiden (ODE/begynnelsevärdesproblem) - vad är diskretisering i rummet (PDE/randvärdesproblem)?
- Vad händer när upplösningen/antalet partiklar ökar?

Demo: vågutbredning 1D

Rumsderivata I

Modell: mass-fjäder, representerar vågutbredning i 1D, u skalär (för enkelhets skull)
ODE:

$$\dot{u}^i = v^i$$
$$Mh\dot{v}^i = F^i$$

Fjäderkrafter på partikel i:
$F_{i,i+1} = \frac{E}{h}(u^{i+1} - u^i)$ och $F_{i,i-1} = -\frac{E}{h}(u^i - u^{i-1})$
Totalkraft på partikel i: $F_i = F_{i,i+1} + F_{i,i-1} = \frac{E}{h}(u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1})$
$Mh\dot{v}^i(t) = \frac{E}{h}(u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1})$
$\frac{E}{M} = 1$
$\dot{v}^i(t) = \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, ..., J.$
$\ddot{u}^i(t) = \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{h^2} \quad i = 1, ..., J.$

Rumsderivata II

Definitioner: $\Delta x = h$ och $\Delta u^i = u^{i+1} - u^i$. $E = 1$
Fjäderkraft:

$$F_{i,i+1} = \frac{\Delta u^i}{\Delta x} = \frac{u^{i+1} - u^i}{h}. \tag{1}$$

Derivata (för små h):

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \tag{2}$$

$$u''(x) = \frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h} \tag{3}$$

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \tag{4}$$

Rumsderivata III

Vi kan alltså skriva mass-fjädermodellen som vågekvationen:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}(x,t) &= u''(x,t) \quad \text{för } x \in (0,1), t > 0,\\
u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad \text{for } t > 0,\\
u(x,0) &= u^0(x), \quad \dot{u}(x,0) = \dot{u}^0(x) \quad \text{för } x \in (0,1),
\end{aligned}$$

där $u^0(x)$ och $\dot{u}^0(x)$ är givna funktioner. $u(0,t)$ och $u(1,t)$ är randvillkor, som vi har modellerat med stora massor i ändarna.

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= v\\
\dot{v} &= F'\\
F &= u'
\end{aligned}$$

där u är förskjutning, v hastighet och F fjäderspänning och F' fjäderkraft som agerar på partiklar.

Demo: rumsderivata, upplösning M=20

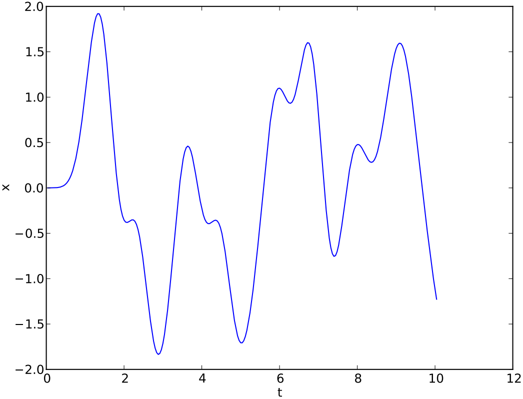


Figure: Förskjutning för M=20 (antal massor)

Demo: rumsderivata, upplösning M=40

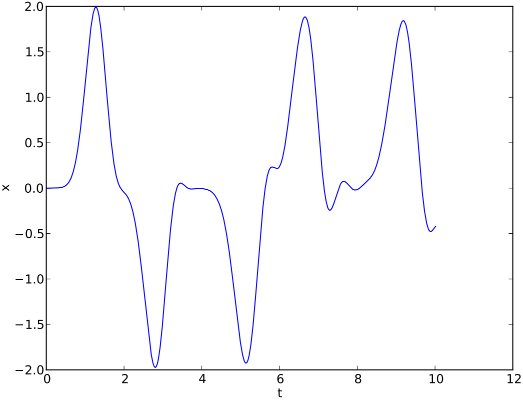


Figure: Förskjutning för M=40 (antal massor)

Demo: rumsderivata, upplösning M=80

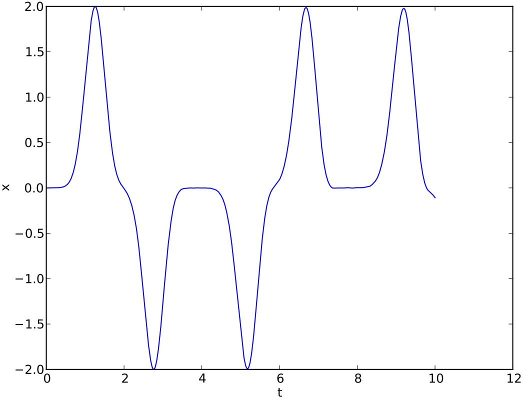


Figure: Förskjutning för M=80 (antal massor)

Demo: rumsderivata, upplösning M=160

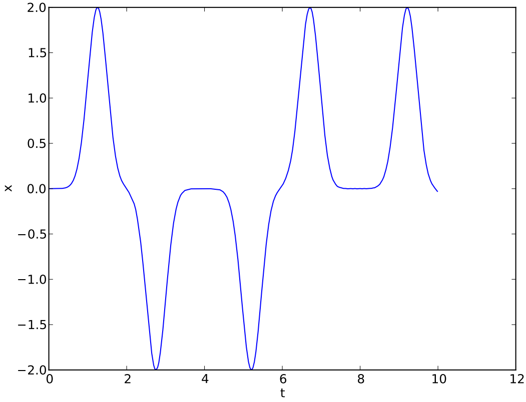


Figure: Förskjutning för M=160 (antal massor)

Demo: rumsderivata, upplösning M=320

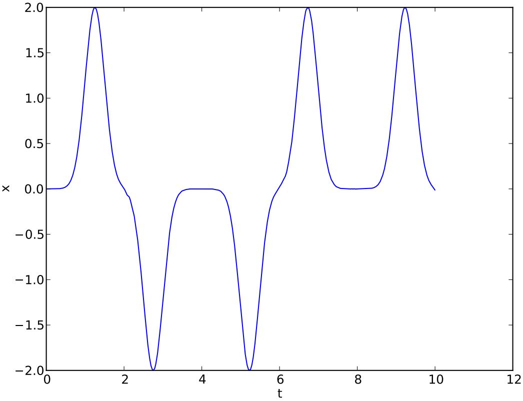


Figure: Förskjutning för M=320 (antal massor)

Demo: rumsderivata, upplösning M=640

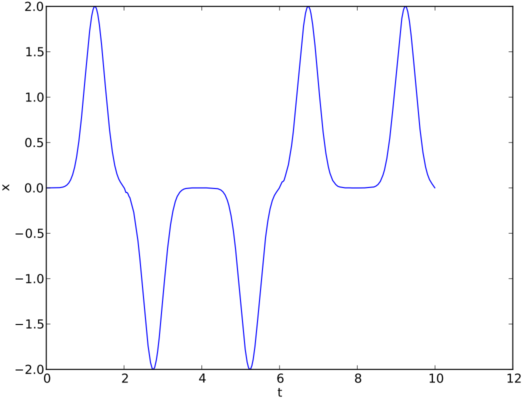


Figure: Förskjutning för M=640 (antal massor)

Demo: rumsderivata, upplösning M=1280

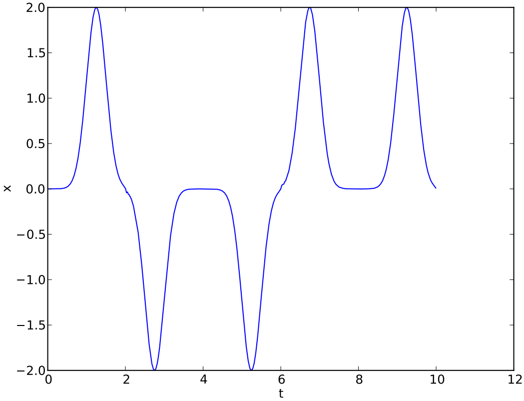


Figure: Förskjutning för M=1280 (antal massor)

Diskretisering av rumsderivata

Syfte:
Vi vill börja direkt från kontinuummodellen (rums och tidsderivata) och automatiskt konstruera en diskret modell. Vi formulerar finita elementmetoden som ett sätt att göra det.

- Hur göra i 2D/3D? Hur sätta fjäderparametrar systematiskt osv.? Hur modellera andra fenomen?
- Hur ser lösningen ut mellan punkterna?
- Finns det ett systematisk sätt att gå från kontinuum till diskret för generella partiella differentialekvationer?

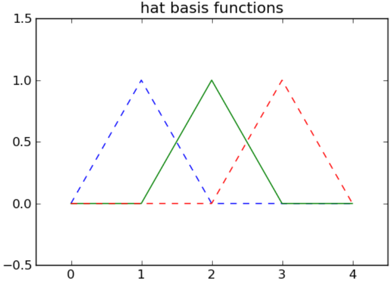
Finita elementmetoden I

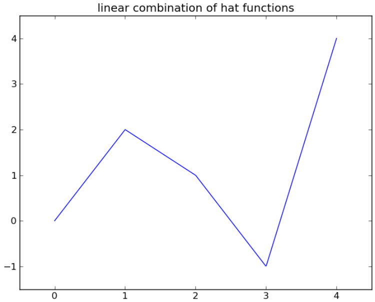
Vi vill lösa en differentialekvation: $R(u) = Au - g = 0$, där A är någon operator på u (differentialoperator t.ex.)

ex: $Au = \ddot{u} - u''$ och $g = 0 \Rightarrow \ddot{u} - u'' = 0$
(vågekvation).

ex: $Au = Iu \Rightarrow u = g$
(A är identitet, blir en L2-projektion, enkelt exempel för att förstå metoden).

Repetition: styckvis linjära funktioner





Finita elementmetoden II

Som lösning söker vi en funktion $u(x,t)$ som en linjärkombination:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{J} u_j(t)\phi_j(x), \tag{5}$$

av J givna *basfunktioner* $\phi_1(x),...,\phi_J(x)$ som beror av x, med okända koefficienter $u_1(t),....,u_J(t)$, som kan bero av t.
Basfunktionerna $\phi_j(x)$ är styckvis linjära "hattfunktioner" från modul 2:

$$\phi_i(jh) = 1 \quad \text{if } j = i, \quad \phi_i(jh) = 0 \quad \text{else}, \quad i,j = 1,...,J, \tag{6}$$

Finita elementmetoden: III

Hur hitta koefficienterna $u_i(t)$?

Sätt in $u(t, x)$ i ekvationen: $R(u)$, men:.

$R(u) = 0$ skulle uppfylla differentialekvationen exakt, kan inte vara generellt sant för en styckvis linjär funktion u

Galerkins metod: villkor att $\int_a^b R(u)\phi_j dx = 0, i = 0, 1, ..., J$
Notera: J koefficienter och J villkor/ekvationer.
Dvs. multiplicera med basfunktion och integrera, för alla basfunktioner.

Tolkningar:
Kan ses som att ett viktat *medelvärde* av residualen måste vara 0 eller som *ortogonalitet* (residualen måste vara ortogonal mot basfunktionerna)

Finita elementmetoden: L2-projektion

Exempel: Lös $u = g$ med FEM.

1. Nät/Basfunktioner Välj ett nät (bestämmer basfunktionerna)
2. Definiera lösningsfunktion Definiera lösning som linjärkombination:
   $u(x,t) = \sum_{j=1}^{J} u_j \phi_j(x)$.
3. Definiera villkor/ekvationer för koefficienter
   $\int_a^b R(u)\phi_i dx = 0, i = 0, 1, ..., J$
   $\int_a^b u\phi_i dx = \int_a^b g\phi_i dx, i = 0, 1, ..., J$
   Notera att vi har J koefficienter (från u) och J villkor/ekvationer.
4. Lös system för koefficienterna I det här fallet blir systemet ett linjärt ekvationssystem: $Au_j = b$

Finita elementmetoden: L2-projektion demo

Finita elementmetoden: Vågekvation

Exempel: Lös $\ddot{u} - u'' = 0$ med FEM.

1. Nät/Basfunktioner Välj ett nät (bestämmer basfunktionerna)
2. Definiera lösningsfunktion Definiera lösning som linjärkombination:
   $u(x,t) = \sum_{j=1}^{J} u_j(t)\phi_j(x)$.
3. Definiera villkor/ekvationer för koefficienter
   $\int_a^b R(u)\phi_i dx = 0, i = 0, 1, ..., J$
   $\int_a^b \ddot{u}\phi_i dx + \int_a^b u'\phi_i' dx = 0, i = 0, 1, ..., J$
   Notera att vi har J koefficienter (från u) och J villkor/ekvationer.
   Notera att vi partialintegrerar rumsderivatorna, så att en hamnar på basfunktionen ϕ_i (u har inte två derivator).
4. Lös system för koefficienterna I det här fallet blir systemet en ODE för koefficienterna: $\ddot{u}^i + Au^i = 0$

Finita elementmetoden: Vågekvation demo

Sammanfattning

...