U1. **a.** m=2 och p=2.

b. $u(x) = \cos(\pi x/2)$ vilket ger oss att $|u''(x)| = \pi^2/4\cos(\pi x/2)$. Max av $|u''(x)|$ på intervallet $0 \leq x \leq 2$ är $\pi^2/4$ vilket ger oss att

$$\frac{1}{12}2\frac{\pi^2}{4}k^2 < 0.001 \Rightarrow k < \sqrt{\frac{0.024}{\pi^2}}$$

U2. **a.** Ekvationssystemet ges av $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, där

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2\cos(x) - 0.08 \\ y^2 - x^2\sin(y) - 0.04 \end{pmatrix}$$

Tillhörande Jacobianmatris är

$$J = \begin{pmatrix} 2x - y^2\sin(x) & 2y\cos(x) \\ -2x\sin(y) & 2y - x^2\cos(y) \end{pmatrix}$$

Insättning av $x = 1$, $y = 0$ ger vänsterledet

$$\mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} 0.92 \\ -0.04 \end{pmatrix}$$

Jacobianen blir

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Det linjära ekvationssystemet som ska lösas i första iterationen blir

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.92 \\ -0.04 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{h_0} = \begin{pmatrix} -0.46 \\ -0.04 \end{pmatrix}$$

och $x_1 = 1 - 0.46 = 0.54$, $y_1 = 0 - 0.04 = -0.04$.

b. Insättning av $x = 0$, $y = 1$ ger en singulär matris

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

U3. **a.** Vi kan uppskatta interpolationsfelet $e = u - u_h$ på intervallet $x \in [0, 1]$ med:

$$|e| \leq \frac{1}{8}max(|f''(x)|)h^2$$

b. Vi delar upp intervallet i två delintervall av längd h_1 och h_2. Vi använder ovanstående feluppskattning för att bestämma det h_2 som ger felet 6 enligt feluppskattningen, och verifierar sedan att h_1 också uppfyller feluppskattningen.

$$f(x) = -25x^4 \Rightarrow$$
$$f''(x) = -300x^2$$

Absolutbeloppet av andraderivatan växer monotont och tar sitt största värde i högerpunkten på intervallet $x = 1$. h_2 ska alltså uppfylla:

$$6 = \frac{1}{8}|f''(1)|{h_2}^2 = \frac{1}{8}300{h_2}^2 \Rightarrow$$
$$h_2 = \frac{2}{5}$$

Vi vet då att $h_1 = 1 - h_2 = \frac{3}{5}$. Vi verifierar att h_1 även ger ett fel som är mindre än 6, där andraderivatan tar sitt största värde i högerpunkten på delintervallet $x = \frac{3}{5}$:

$$\frac{1}{8}|f''(\frac{3}{5})|{h_1}^2 = \frac{1}{8}300(\frac{3}{5})^2(\frac{3}{5})^2 = \frac{243}{50} \leq 6$$

U4. För att en fixpunktsiteration, $x^{i+1} = g(x^i)$ ska konvergera krävs att $|g'(x)| < 1$ i närheten av fixpunkten. Här är $g(u_{n+1}) = u_n + \frac{k}{2}(\sin(10u_n) + \sin(10u_{n+1}))$ vilket ger oss att

$$|g'(u_{n+1})| = \frac{k}{2}10|\cos(10u_{n+1})| < 1 \Rightarrow k < \frac{1}{5}$$

om man ska vara säker på att iterationen kommer att konvergera i varje steg. Här har vi använt att $max|\cos(10u_{n+1})| = 1$.

U5. Se delkapitel 82.2 i kapitel 82: "Time Stepping Error Analysis".