



KTH Computer Science
and Communication

Uppgift 3

Frivillig

I anteckningarna om snabb Fouriertransform antog vi att funktionen som behandlades var bandbegränsad. I praktiken är inte funktioner bandbegränsade och man skulle kunna tro att den diskreta Fouriertransformen därför har mindre praktiskt intresse. Vi ska i denna uppgift emellertid se att så inte är fallet. Fouriertransformen är mycket viktig även för allmänna funktioner, som inte är bandbegränsade. Den kan då användas till att ge mycket noggranna approximationer av funktion, derivator och integraler. För periodiska funktioner i C^∞ ger den "oändlig" noggrannhet, dvs felet går mot noll snabbare än h^p för alla p . Detta kallas också "spektral noggrannhet". Vi antar att

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}, \quad \hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

(obs, oändlig summa, dvs inte bandbegränsad funktion) och beräknar den diskreta Fouriertransformen som tidigare från n ekvidistanta samplevärden

$$f_j = f(x_j), \quad x_j = jh, \quad h = \frac{2\pi}{n},$$

dvs,

$$\tilde{f}_\ell = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-i\ell x_j}.$$

Från dessa värden kan vi också bilda funktionen

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-n/2}^{n/2} \tilde{f}_k e^{ikx}.$$

När f är bandbegränsad är alltså $\tilde{f}_\ell = \hat{f}_\ell$ och $\tilde{f}(x) = f(x)$. När f inte är bandbegränsad är dock i allmänhet $\tilde{f}_\ell \neq \hat{f}_\ell$ och $\tilde{f}(x) \neq f(x)$.

1. Visa att $\tilde{f}(x)$ interpolerar $f(x)$ i noderna x_j , dvs

$$\tilde{f}(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

På grund av detta kallas $\tilde{f}$ för *Fourierinterpolanten* till f .

2. Skriv ett MATLAB-program som approximerar derivatan till en periodisk funktion $f(x)$ genom att beräkna den exakta derivatan av $\tilde{f}(x)$. Använd kommandona `fft` och `ifft` i MATLAB och utnyttja att $\tilde{f}'(x)$ ges av Fourierkoefficienterna $ik\tilde{f}_k$. Beräkna och plotta felet i approximationen som funktion av antal punkter n för $f(x) = \exp(\cos(x))$. Jämför med felet du får om du använder vanliga centraldifferenser.
3. Visa att trapetsregeln för periodiska funktioner är ekvivalent med exakt integration av $\tilde{f}(x)$. Visa med ett numeriskt exempel att noggrannheten för trapetsregeln är spektral när integranden är periodisk och C^∞ .