



KTH Computer Science
and Communication

Uppgift 4

I denna uppgift undersöker vi de speciella numeriska svårigheterna som uppkommer när man löser styva ODEer. Vi betraktar det linjära systemet

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -1000y_1 - 1001y_2,\end{aligned}\tag{1}$$

1. Bestäm teoretiskt h_{stab} så att framåt Euler (för detta problem) är absolutstabil när steglängden $h < h_{\text{stab}}$. Verifiera stabilitetsgränsen numeriskt genom att lösa problemet med olika steglängder h . Vad händer när $h > h_{\text{stab}}$? Plotta två typiska numeriska lösningar, en stabil och en instabil, tillsammans med den exakta lösningen.
2. Tag begynnelsedata $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$ och visa att exakta lösningen då är $y_1(t) = -y_2(t) = e^{-t}$. Framåt Euler är som bekant en första ordningens metod och det globala felet vid $t = 1$ uppfyller

$$|y(1) - u_N| \approx Ch, \quad Nh = 1.\tag{2}$$

Uppskatta felkonstanten C genom att lösa (1) för några (riktigt) små h fram till $t = 1$.

3. Antag att vi vill lösa (1) till tiden $t = 1$ med ett fel som ska vara mindre än 10^{-2} . Baserat på uppskattningen (2), hur stor steglängd h_{nog} skulle man kunna använda och fortfarande uppnå den stipulerade noggrannheten? Vi säger att noggrannhetskravet sätter restriktion $h < h_{\text{nog}}$ på steglängden. Vad kan man säga om storlekarna på h_{nog} och h_{stab} ?
4. För styva ekvationer utgör typiskt stabilitetskravet en mycket större begränsning på steglängden h än noggrannhetskravet, när man använder explicita metoder, dvs $h_{\text{stab}} \ll h_{\text{nog}}$. Därför använder man med fördel istället *implicita* metoder för styva problem, helst så kallade A-stabila metoder (sådana som är absolutstabila i *hela* vänstra delen av komplexa talplanet). Den enklaste A-stabila metoden är bakåt Euler. Lös problemet ovan med denna metod. Hur stor steglängd kan ni använda och fortfarande uppfylla noggrannhetskravet? Hur mycket vinner ni på denna metod?