



KTH Computer Science
and Communication

Uppgift 5

Vi studerar den tidsberoende versionen av uppgift 4 i lab 2. Temperaturfördelningen $T(t, x)$ i en cylindrisk stav beskrivs av den paraboliska värmeledningsekvationen i en dimension

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q(x), \quad 0 < x < L, \quad (1)$$

med randvillkoren

$$T(t, 0) = t_0, \quad T(t, L) = t_1,$$

och initialtemperaturen $T(0, x) = t_0 + (t_1 - t_0)x/L$. Parametrarna som ingår är t_0 (rumstemperatur, fixerad temperatur för vänstra ändan av staven), t_1 (fixerad förhöjd temperatur för högra ändan av staven) och $Q(x)$ (värmemängd som tillförs staven externt), k (värmeledningsförmågan), c_p (specifika värmekapaciteten), ρ (densiteten) och L (stavens längd). Vi använder samma värden på parametrarna som i lab 2 (se den lablydelsen). För enkelhetens skull väljer vi också $\rho c_p = k$.

1. Gör en semidiskretisering av problemet och lös med Method of Lines (MOL) enligt följande: Använd centraldifferenser i rummet och ekvidistanta punkter med steget Δx . Det leder till ett system av ordinära differentialekvationer,

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0. \quad (2)$$

- (Ni kan här utnyttja er tidigare lösning av uppgift 4, lab 2; $\mathbf{A}$ och $\mathbf{b}$ blir väsentligen likadana, men var noga med tecken och skalningen med stegländan Δx .) Lös (2) med Framåt Euler till tiden $t = 0.25$. Välj $\Delta x = 0.1$ och tidssteget $\Delta t = 0.005$. Spara er framräknade lösning i en stor matris (en kolumn per tidssteg) och använd tex `mesh` för att göra en tredimensionell plot av $T(t, x)$, med axlarna t och x . Prova gärna också att plotta lösningen on-the-fly medan ni räknar för att se hur den utvecklar sig. Ni behöver då forcera grafikuppdateringen genom att lägga till kommandot `drawnow` efter `plot`.
2. Verifiera CFL-villkoret $\Delta t / \Delta x^2 \leq 1/2$ genom att testa olika Δt och Δx . Visa exempel på vad som händer när det inte är uppfyllt.
 3. CFL-villkoret är typiskt för explicita metoder. Det betyder att tidssteget måste väljas mycket litet, vilket därför gör dem ineffektiva för paraboliska problem. Implementera istället den implicita metoden Crank-Nicolson (se tex Bradie s 812). Beräkna lösningen vid $t = 0.25$. Visa att du nu kan få en lika noggrann lösning med ett mycket längre tidssteg.
 4. Lösningen till (1) konvergerar mot ett stationärt tillstånd ("steady state") när $t \rightarrow \infty$. Detta är lösningen till det elliptiska tvåpunkts-randvärdesproblemet som ni behandlade i lab 2. Där räknade ni bland annat fram stavens stationära maxtemperatur. Använd Crank-Nicolson för att bestämma med två decimalers noggrannhet hur lång tid det tar innan stavens maxtemperatur uppnått 99% av denna temperatur.