



KTH Computer Science
and Communication

Uppgift 6

Betrakta Poissons ekvation på enhetsrutan,

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

med Dirichlet-randvillkor,

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0.$$

1. Diskretisera problemet med fempunkts-formeln tex enligt beskrivningen i Bradie kapitel 9.1. Dela in rutan i N delar i varje koordinatriktning: Definiera beräkningsnätet (x_k, y_ℓ) med $x_k = k\Delta x$ och $y_\ell = \ell\Delta x$ där nätstorleken ges av $\Delta x = 1/(N+1)$. Approximera den exakta lösningen $u(x, y)$ på beräkningsnätet med de diskreta värdena

$$u_{k\ell} \approx u(x_k, y_\ell), \quad 0 \leq \ell \leq N+1, \quad 0 \leq k \leq N+1.$$

Låt också $f_{k\ell} = f(k\Delta x, \ell\Delta x)$.

För de inre punkterna, $1 \leq k \leq N$ and $1 \leq \ell \leq N$, approximeras derivatorna med centraldifferenser, vilket ger fempunktsformeln,

$$u_{k-1,\ell} + u_{k+1,\ell} + u_{k,\ell-1} + u_{k,\ell+1} - 4u_{k\ell} = (\Delta x)^2 f_{k\ell}. \quad (1)$$

För randpunkterna gäller

$$u_{0,\ell} = u_{N+1,\ell} = u_{k,0} = u_{k,N+1} = 0, \quad 0 \leq \ell \leq N+1, \quad 0 \leq k \leq N+1.$$

Detta ger ett linjärt ekvationssystem med $(N+2)^2$ obekanta. Samla ihop detta i matrisform,

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}.$$

Du kan välja att reducera systemet genom att sätta in de kända randvärdena i ekvationerna för de inre punkterna, eller låta dem ingå i systemet som triviala ekvationer.

Definiera högerledsvektorn $\mathbf{b}$ genom att tex välja

$$f(x, y) = -\exp(-20[(x-0.75)^2 - (y-0.15)^2]) - \exp(-40[(x-0.2)^2 - (y-0.8)^2]).$$

Lös systemet med backslash. Plotta lösningen med MATLABs kommandon `mesh` och/eller `contour`. Kommandot `reshape` kan vara användbart här för att konvertera mellan kolumnvektor och matrisrepresentation av lösningen.

2. Testa noggrannhetsordningen genom att läsa av lösningsvärdet i $(x, y) = (0.5, 0.5)$ för olika storlekar på diskretiseringen. (Se till att välja sådana N så att denna punkt ingår i beräkningsnätet.) Bilda kvoterna

$$\frac{u_{\Delta x} - u_{\Delta x/2}}{u_{\Delta x/2} - u_{\Delta x/4}}$$

för att uppskatta ordningen. Obs! För att kunna ta små Δx är det viktigt att A lagras som en gles matris. Annars tar lösningen alldeles för lång tid.

3. (Frivillig)

Gör nu samma sak men i en L-formad domän, given av

$$(x, y) \in [0, 1]^2 \setminus (r, 1]^2.$$

(Se bild nedan.) Använd samma Dirichlet-randvillkor och högerled f . Välj $r = 0.4$. Plotta lösningen som ovan och undersök noggrannhetsordningen i punkten $(x, y) = (0.3, 0.3)$.

Den nya svårigheten består i att hantera geometrin och randvillkoren på rätt sätt.

Notera: på grund av hörnet vid L-ets knä introduceras en singularitet i exakta lösningens derivata. Genom variabelseparation kan man visa att lösningen nära hörnet ser ut som

$$u(r, \theta) \sim r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)$$

där (r, θ) är polära koordinater centrerade i hörnet och α är storleken på inre vinkeln (här = $3\pi/2$). Derivatorna nära hörnet är därför obegränsade, vilket gör att fempunktsformeln är en dålig approximation av Laplace-operatören där. Detta reducerar noggrannhetsordningen jämfört med tidigare.

4. (Frivillig)

Använd koden från förra övningen. Tag $r = 0.5$ och sätt upp matrisen A . Beräkna egenvektorer som motsvarar de minsta egenvärdena (i absolutbelopp) till $A/(\Delta x)^2$. Den skalade matrisen är en diskret approximation av den kontinuerliga Laplace-operatören. Dess egenvektorer approximerar egenfunktionerna för det kontinuerliga egenvärdesproblemet, dvs funktioner för vilka

$$u_{xx} + u_{yy} = \lambda u, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

(Notera att pga vårt val av tecken är alla egenvärden strikt negativa.)

Plotta egenvektorer med `mesh` eller `contour` som tidigare.

En fysikalisk tolkning av egenfunktionerna är vibrationsmoder med frekvenserna $\sqrt{-\lambda}$ i ett membran fastspänt vid ränderna (tex en trumma). Visa att om u satisfierar (2) så satisfierar den tidsoscillerande funktionen $v(t, x) = \sin(\sqrt{-\lambda}t)u(x)$ vågekvationen

$$v_{tt} = v_{xx} + v_{yy},$$

som bla beskriver hur förskjutningen från jämvikt i ett membran kan variera i tiden.

Känner du igen den första egenfunktionen från någonstans?

Mer material relaterat till deluppgifterna 3 och 4 finns på:

www.mathworks.se/company/newsletters/news_notes/clevescorner/win03_cleve.html

