



KTH Computer Science
and Communication

Teorifrågor

Störningsanalys

1. Värdet på x är uppmätt till 0.956 med ett absolutfel på högst 0.0005. Ge en övre gräns för absolutfelet i $y = \exp(x) + x^2$. Motivera svaret.
2. Ekvationen $\log(x) - x/50 = 0$ löstes med Newtons metod och avbrottskriteriet $|\log(x_n) - x_n/50| < 10^{-10}$. Resultatet blev $x_n = 282.1158987499664$. Ge en övre gräns för absolutfelet i x_n (jämfört med den exakta roten). Motivera svaret.
3. Ett komplicerat problem med indata a , b och c löses och ger resultatet y . Indata har felgränserna $a \pm 0.01$, $b \pm 0.02$ och $c \pm 0.005$. Hur kan man med experimentell störningsräkning skatta felet i y ?
4. Konditionstalet för ett problem ligger runt 10000. Hur många korrekta siffror måste indata ha för att lösningen ska få sex siffrors noggrannhet?
5. Ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösts med dator. Vi vet att komponenterna i $\mathbf{b}$ är uppmätta värden med osäkerheter $\pm 10^{-3}$. Förutom lösningen $\mathbf{x}$ har följande maximumnormer beräknats: $\|\mathbf{x}\| = 12.5$, $\|A\| = 5$, $\|A^{-1}\| = 800$, $\|\mathbf{b}\| = 125$. Härled en skattning av osäkerheten i lösningen.
6. Beräkna konditionstalet för en diagonalmatris med diagonalelementen $2/k$, $k = 1, 2, \dots, 20$.

Olinjära ekvationer

1. Ekvationen $x^5 = x + 1$ har en rot mellan 1 och 2 och löses med intervallhalveringsmetoden (bisection method). Beskriv metoden. Hur många intervallhalveringar behövs för att bestämma roten med sex decimalers noggrannhet?
2. Ekvationen $\cos(x) - x^2 = 0$ har en rot nära 0.825. Formulera ekvationen som ett fixpunktproblem och undersök om motsvarande fixpunktiteration kan konvergera mot roten.
3. Vad krävs för att iterationen $y_{n+1} = g(y_n)$, $n = 0, 1, \dots$, med y_0 given, skall konvergera mot en rot $y^* = g(y^*)$? Motivera svaret genom att betrakta felet $e_n := y_n - y^*$ och taylorutveckla $g(y)$ runt y^* .
4. Vad menas med att fixpunktiteration har linjär konvergens? Beskriv i ord och formler. När kan konvergensen bli bättre och sämre?
5. Visa i en figur hur Newtons metod för lösning av en olinjär ekvation fungerar. Visa också när konvergensproblem kan uppstå.
6. Vad menas med att Newtons metod har kvadratisk konvergens? Beskriv i ord och formler. När kan konvergensen bli sämre?

7. Härled kvadratiske konvergenssegenskapen hos Newtons metod för enkelrötter. Tips: Låt y^* vara exakta roten, $f(y^*) = 0$. Betrakta felet $e_n := y_n - y^*$ och taylorutveckla $f(y)$ runt y^* .
8. Beskriv detaljerat Newtons metod för lösning av ett icke linjärt ekvationssystem.
9. Beskriv sekantmetoden för en skalär ekvation. Hur många startvärden krävs? Hur många funktionsberäkningar krävs i varje iterationssteg? Ange en nackdel och en fördel hos sekantmetoden i jämförelse med Newtons metod.
10. För en iterativ metod uppskattas felet e_n i iterationerna till

$$e_1 = 0.11345, \quad e_2 = 1.48995 \cdot 10^{-2}, \quad e_3 = 2.48929 \cdot 10^{-4}, \quad e_4 = 6.416252 \cdot 10^{-8}.$$

Vilken konvergensordning motsvarar detta troligen?

Linjära ekvationssystem

1. Hur definieras maxnormen och euklidiska normen (kallas också "2-normen") för en vektor? Hur definieras maxnormen av en matris? Om matrisen A har normen 17 och vektorn $\mathbf{x}$ normen 7, vad vet man om normen för $A\mathbf{x}$?
2. Vad är beräkningskostnaden i termer av n för att
 - (a) lösa ett fullt ekvationssystem med n obekanta,
 - (b) lösa ett triangulärt ekvationssystem med n obekanta,
 - (c) lösa ett tridiagonalt ekvationssystem med n obekanta,
 - (d) multiplicera en matris av storleken $n \times n$ med en n -vektor,
 - (e) multiplicera två matriser av storleken $n \times n$?
3. Om ett ekvationssystem med fylld systemmatris och 17 obekanta tar 17 millisekunder att lösa, hur lång tid ungefär tar det att lösa ett liknande system med 340 obekanta?
4. Om lösningen (med en effektiv algoritm) av ett tridiagonalt system med 500 obekanta tar 0.1 sek, hur lång tid tar en effektiv lösning av ett tridiagonalt system med 10000 obekanta? Man kan undvika att lagra hela matrisen, hur mycket vinner man i lagringsutrymme i det stora systemet ovan?
5. Om lösningen (med en effektiv algoritm) av ett triangulärt system med 1000 obekanta tar 1 sek, hur lång tid tar det att lösa ett triangulärt system med 5000 obekanta?
6. Vad menas med pivotering vid lösning av linjära ekvationssystem? Varför används det?
7. Betrakta den iterativa metoden $P\mathbf{x}_{n+1} = B\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$ för att lösa ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (där alltså $A = P - B$). Vad krävs av P och B för att metoden ska konvergera och inte ha alltför hög beräkningskostnad? Jacobis metod kan skrivas på den här formen med ett speciellt val av P . Vilket?
8. Vad är LU -faktoriseringen av en matris A ? Antag att vi redan har A -matrisens LU -faktorisering. Visa hur man då löser $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vad blir beräkningskostnaden?
9. Hur kan man med hjälp av LU -faktorisering effektivisera problemet att lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$ för väldigt många högerled $\mathbf{b}_k$ (men hela tiden samma A)?

Eigenvärden

1. Beskriv potensmetoden (power method) för egenvärdesberäkningar. Vilka egenvärden kan man räkna ut med denna metod?

Approximationsteori

1. Vi vill använda ett polynom för att interpolera värdena $y_1, \dots, y_4$ i x -koordinaterna $x_1, \dots, x_4$. Vilket gradtal kommer polynomet i allmänhet ha? Visa att polynoms koefficienter kan beräknas genom att lösa ett linjärt ekvationssystem.
2. Vi vill att polynomet $p(x)$ ska interpolera värdena 1, 3, -1, 2 vid $x = -3, -2, 1, 5$. Ställ upp ett linjärt ekvationssystem för koefficienterna till $p(x)$ där du specificerar elementen i systemmatrisen och i högerledet.
3. Varför bör man undvika interpolation med polynom av högt gradtal och ekvidistanta interpolationspunkter? Vad är bättre alternativ?
4. Vad är noggrannhetsordningen för styckvis linjär interpolation? Det vill säga, hur beror (det punktvisa) felet på avståndet h mellan noderna?
5. Vad är kubiska splines?
6. Bestäm minstakvadratlösningen till $c_1 - c_2 \approx 2$, $c_2 \approx 2$, $c_1 + c_2 \approx 12$. Vad är det som minimeras? Vad menas med normalekvationerna?
7. Minstakvadratanpassning till modellen $y = a \cos(x) + b \cos(2x)$ görs till givna mätdata $y_1, \dots, y_5$ vid x -värdena $-\pi/2, -\pi/4, 0, \pi/4, \pi/2$. Hur ser ekvationssystemet för de obekanta a, b ut? Vad kallas dessa ekvationer?
8. Vilket vållar mest problem när ett överbestämt system $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$ skall lösas med minstakvadratmetoden: att raderna i matrisen är linjärt beroende eller att kolumnerna är linjärt beroende?

Numerisk derivering och integration

1. Vad menas med noggrannhetsordningen för en numerisk metod, t.ex. för att beräkna integraler?
2. Derivatn av en funktion kan approximeras med framåt- respektive centraldifferenskvot. Härled noggrannhetsordningen i båda fallen med hjälp av Taylorutveckling.
3. Beskriv (sammansatta) trapetsregeln för integralberäkning. Vilken noggrannhetsordning har metoden?
4. Beskriv (sammansatta) Simpsons formel för integralberäkning. Vilken noggrannhetsordning har metoden?
5. En integral approximeras med en numerisk metod. När man använder delintervall med längderna 0.4, 0.2 och 0.1 får man felen 0.0231, 0.00291 och 0.003592. Vilken noggrannhetsordning har metoden? Motivera!
6. Hur skattar man felet vid integralberäkning med trapetsregeln med hjälp av beräkningar med olika antal delintervall?

7. En integral approximeras med en numerisk metod. När man använder delintervall med längderna 0.5, 0.25 och 0.125 får man följande approximationer av den exakta integralen: 0.464521, 0.460897 och 0.459997. Vilken noggrannhetsordning har troligen metoden? Motivera!

Ordinära differentialekvationer

1. Skriv differentialekvationen $y''' - t^2 y'' + y'/2 + y^2/(1+t) - 1 = 0$ som ett första ordningens system.
2. Skriv differentialekvationerna

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = y^2 - x + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -x^2 - y + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \sin(t),$$

som ett första ordningens system.

3. Den kändaste av Runge-Kuttas (RK) metoder har noggrannhetsordningen fyra. Framåt Euler (FE) har bara noggrannhetsordningen ett. Vad menar man med det? Om beräkningar med steglängder 0.1, 0.05, 0.025 görs, hur avspeglar sig noggrannhetsordningarna för RK och FE på resultatet?
4. Vad menas med lokala trunkationsfelet och globala felet vid numerisk lösning av ODE? Exemplifiera för framåt Euler.
5. Härled ett uttryck för lokala trunkationsfelet hos framåt Euler.
6. Vad menas med att en numerisk metod för ett begynnelsevärdesproblem är konvergent?
7. Vad är stabilitetsområdet för en numerisk ODE-metod? Hur definieras det? Varför är det intressant?
8. Härled stabilitetsområdet för framåt Euler. För vilka steglängder h är metoden absolutstabil vid lösning av

$$\frac{dz}{dt} = -500z - \sin(t), \quad z(0) = 0?$$

9. För vilka steglängder h är framåt Euler absolutstabil vid lösning av begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -5y - \sin(t), & y(0) &= 0, \\ \frac{dz}{dt} &= y - 500z - \cos(t), & z(0) &= 1. \end{aligned}$$

När är *bakåt* Euler absolutstabil för detta problem?

10. Vad menas med att en numerisk ODE-metod för begynnelsevärdesproblem är explicit respektive implicit? Är Crank-Nicolsons metod,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(y_{k+1}, t_k) + f(y_k, t_k))$$

explicit eller implicit? Vilken noggrannhetsordning har metoden?

11. Vad menas med en styv differentialekvation? Vilka problem medför en styv differentialekvation för explicita metoder?

Randvärdesproblem

1. Vad är skillnaden mellan ett begynnelsevärdesproblem (BVP) och ett randvärdesproblem?
2. Vi vill lösa det linjära randvärdesproblemet

$$-u_{xx} = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

med finita differenser.

- (a) Hur diskretiserar man ekvationen och approximerar den med ett linjärt ekvationssystem $Au = f$?
 - (b) Hur ser matrisen A ut? Hur kan man lösa ekvationssystemet effektivt?
 - (c) Vad blir noggrannhetsordningen?
3. Vi vill lösa det olinjära randvärdesproblemet

$$-u_{xx} + a(x)u_x = f(u), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

med finita differenser.

- (a) Hur diskretiserar man ekvationen och approximerar den med ett olinjärt ekvationssystem $F(u) = 0$?
- (b) Hur ser funktionen F och dess jakobian ut? Hur kan man lösa ekvationssystemet?