



KTH Computer Science
and Communication

Laboration 2

Interpolation, integration och differentialekvationer

Sista dag för bonuspoäng, se kursplanen. Kom väl förberedd och med välordnade papper till redovisningen. Numeriska resultat ska finnas noterade. Båda i laborationsgruppen ska kunna redogöra för teori och algoritmer!

1. Interpolation och minstakvadratanpassning

I almanackan kan man hitta tider för solens upp- och nedgång för några orter i Sverige. Tabellen nedan är uträknad ur almanackan och anger dagens längd i Stockholm den första dagen i varje månad under sommarhalvåret (tiden är angiven decimalt):

Månad:	1 april	1 maj	1 juni	1 juli	1 aug	1 sep
Dagnr :	91	121	152	182	213	244
Solen uppe:	13.18	15.78	17.97	18.38	15.53	14.07

a) Interpolera punkterna med ett femtegradspolynom. Rita de sex givna punkterna och polynomkurvan med fin diskretisering (dagligen från dag 91 till dag 244). Hur länge är solen uppe på nationaldagen den 6 juni? Hur länge är den uppe 15 augusti?

b) Anpassa ett andragradspolynom i minstakvadratmening till den givna datan. Plotta på samma sätt som ovan och ange soltiden 6 juni och 15 augusti enligt denna modell?

c) Tabellen kompletteras med vinterhalvårets värden:

Månad:	1 jan	1 feb	1 mars	1 okt	1 nov	1 dec
Dagnr :	1	32	60	274	305	335
Solen uppe:	6.13	8.02	10.42	11.43	8.73	6.55

Använd det trigonometriska uttryck $c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t$ där $\omega = 2\pi/365$, som modellfunktion. Varför bör detta kunna ge god anpassning? Rita resultatet i en tvårutors subplot med de tolv punkterna och kurvresultatet (dagligen från dag 1 till dag 365) i första rutan. I andra rutan ritas residualvektorns tolv komponenter mot de tolv givna dagnumren. Beräkna felkvadratsumman samt nationaldagens soltid enligt denna modell.

2. Numerisk integration

Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

$$y(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x -axeln och rotationsvolymen är

$$V = \pi \int_0^L y^2 dx.$$

Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2.6$.

a) Implementera de sammansatta versionerna av trapetsregeln och Simpsons formel. Beräkna integralen med steglängderna $h = 0.1$ och $h = 0.05$. Hur många siffror verkar tillförlitliga i resultaten för de två metoderna?

b) Undersök hur approximationsfelet E_h för metoderna beror på steglängden h . (Notera att antal punkter måste vara udda i Simpson-fallet.) Plotta E_h som funktion av h och uppskatta från dem metodernas noggrannhetsordning. Jämför resultatet med de teoretiska noggrannhetsordningarna. Använd MATLABs kommando `loglog` för plottarna, gärna tillsammans med `grid`-kommandot. (För att beräkna felet kan ni först göra en mycket noggrann referenslösning med Simpsons metod, på liknande sätt som i Lab 1.)

Prova också att uppskatta noggrannhetsordningen genom att för små h studera kvoten

$$\frac{I_h - I_{h/2}}{I_{h/2} - I_{h/4}},$$

där I_h är integralapproximationen med steglängd h . Se sid 471–472 i Bradie.

c) Lös integralen med MATLAB-kommandot `quad` som använder en adaptiv version av Simpson. (Gör `help quad` för mer info.) Prova med olika toleranser. Hur liten behövs för att få samma noggrannhet som din Simpson-implementation med 1000 punkter? Hur många funktionsevalueringar gör `quad` då? (Detta ges av andra returargumentet.)

En fin tredimensionell lur bild gör man så här: Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{f}$ vara kolumnvektorer för konturkurvan $y(x)$. Skapa en radvektor för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, tex $2\pi/30$. Bilda matriser $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ och $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} * \text{ones}(\text{size}(\mathbf{f}_i)); \mathbf{Y} = \mathbf{f} * \cos(\mathbf{f}_i); \mathbf{Z} = \mathbf{f} * \sin(\mathbf{f}_i);$$

Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller välj `surf(X,Y,Z)` eller `surfl(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur (gör gärna `help surfl`). Testa andra möjligheter: `axis equal`, `axis off`, `shading interp`, etc.

3. Olinjärt begynnelsevärdesproblem

Givet är den ordinära differentialekvationen

$$y'' + \pi y e^{x/3} (2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) = y/9, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1/3.$$

a) Inför nya variabler $u_1 = y$ och $u_2 = y'$ så att differentialekvationen kan skrivas om som ett system av två första ordningens ekvationer. Utnyttja MATLABs `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2.6$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6} . Rita upp lösningskurvan och jämför den med lurkonturen i uppgift 2.

b) Om man utöver u_1 och u_2 inför u_3 med egenskapen $du_3/dx = \pi y^2 = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer. Vilken innebörd har den nytillkomna ekvationen? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2.6$. Verkar det bekant? Förklara den geometriska innebörden av resultatet.

MATLABs `ode45` har standardtoleransen $\text{reltol} = 10^{-3}$ som används om man inte tar med toleransparametern i funktionsanropet. Prova detta och skriv ut värdet av u_3 vid $x = 2.6$. Vad är din kommentar till resultatet?

4. Randvärdesproblem

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L och med tvärsnittsarean A .

$$-\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = Q(x), \quad T(0) = t_0, \quad T(L) = t_1. \quad (1)$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen t_0 resp t_1 . Konstanten k är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymenhet genereras i staven, tex genom radioaktivitet. Antag att $L = 2$ [m], $k = 2.5$ [$J/(K \cdot m \cdot s)$], $t_0 = 300$ [K], $t_1 = 400$ [K] och $Q(x)$ [$J/(s \cdot m^3)$] är funktionen

$$Q(x) = 300e^{-(x-\frac{L}{2})^2} + 3000e^{-1000(x-\frac{L}{4})^2}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Differentialekvation och randvillkor (1) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$, där $h(n+1) = L$ och approximerar andraderivatan med centraldifferens erhålles

$$\frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{k}Q(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tillsammans med randvillkoren $T_0 = t_0$ och $T_{n+1} = t_1$ leder diskretiseringen till ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b,$$

där A är en $n \times n$ -matris, T är en n -vektor med temperaturvärden i det inre av intervallet och b är en n -vektor som beror av bla randvärdena t_0 och t_1 samt $Q(x_i)$ -värdena.

a) Skriv ner matrisen A för $n = 4$ med papper och penna. Vilken struktur har matrisen A ?

b) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet för en given storlek n . Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Matrisen skapar du tex med hjälp av MATLABs kommando `diag(v)`, som genererar en diagonalmatrix med vektorn v på diagonalen, samt generaliseringen `diag(v,p)` som genererar en matrix med vektor v på diagonal nummer p , där p kan vara både positiv och negativ. Verifiera att matrisen stämmer överens med resultatet i uppgift a) för $n = 4$.

c) Räkna ut temperaturen T genom att lösa det linjära ekvationssystemet $AT = b$ med backslash, `\`. Pröva först med $n = 10$ delintervall. Fördubbla successivt upp till $n = 80$ (eventuellt längre). Plotta de erhållna resultaten i samma figur. Lösningen T kommer att innehålla temperaturen i alla punkter x_i utom i randpunkterna. Du ska plotta temperaturen som funktion av x på *hela* intervallet $0 \leq x \leq L$.

Hur stor är den minimala och maximala temperaturen, samt medeltemperaturen? Uppskatta tillförlitligheten hos värdena.

2D1240, Numeriska metoder gk II

Laboration 2 redovisad och godkänd!

Datum:

Namn:.....

Godkänd av