Lösning till övning 1(2011-11-03)

1 Ickelinjärt ekvationssystem

Pseudo-kod
iter = 0;
dx = 1;
x = given startgissning
while norm(dx)$< 10^{-5}$ & iter < 100
$f = [sin(x) + y^2 + log(z) - 3; 3 * x + 2^y - z^3; x^2 + y^2 + z^3 - 6]$
$J = [cos(x) \quad 2y \quad 1/z; 3 \quad log(2)2^y \quad -3z^2; 2x \quad 2y \quad 3z^2]$;
$dx = -J \backslash f$;
$x = x + dx$;
$iter = iter + 1$;
end

2 Egenvärden

$$\mathbf{x(t)} = sin(t\sqrt{\lambda})\mathbf{y} \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sqrt{\lambda}cos(t\sqrt{\lambda})\mathbf{y} \tag{2}$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\lambda sin(t\sqrt{\lambda})\mathbf{y} \tag{3}$$

Vi sätter (3) in i differentialekvationen och får

$$-\lambda sin(t\sqrt{\lambda})\mathbf{y} + Asin(t\sqrt{\lambda})\mathbf{y} = -\lambda sin(t\sqrt{\lambda})\mathbf{y} + \lambda sin(t\sqrt{\lambda})\mathbf{y} = 0 \tag{4}$$

3 Potensmetoden

(*Bradie, p.277, ex. 4.1.1*)

1.

$$\begin{aligned} Ax_0 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = y_0 \\ x_1 &= y_0/3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Ax_1 &= \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = y_1 \\ x_2 &= y_1/-1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} Ax_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5/3 \end{pmatrix} = y_2 \\ x_3 &= y_2/3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 5/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 LU Faktorisering

- $$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \\ L_1A &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \\ L_2L_1A &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 5 & 5 \\ & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ L_3L_2L_1A &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix} = U \\ L &= L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1} \quad \text{Inversen av } L_i \text{ får man med multiplikation med -1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Visa att algoritmen för LU faktorisering baserad på Gausselimination kräver $\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$ aritmetiska operationer.

Tips:

$$1 + 2 + .. + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2} \quad \text{och} \quad 1^2 + 2^2 + .. + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Följande algoritm skriver över A med L och U

Algorithm 1 *LU faktorisering*

for *i= 1 to n-1*
  for *j = i+1 to n*
    $a_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$
  end for
  for *j = i+1 to n*
    for *k = i+1 to n*
      $a_{jk} = a_{jk} - a_{ji} * a_{ik}$
    end for
  end for
end for

Antal operationer som används i denna algoritm

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\sum_{j=i+1}^{n} 1 + \sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} 2\Big) &= \sum_{i=1}^{n-1}((n-i) + 2(n-i)^2) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}(j + 2j^2) \\
&= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{2(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n
\end{aligned}$$