# Laboration 3: Numerisk derivering, ODE

## 1 Mål för denna laboration

Lab 3 är tänkt som en förberedelse inför föreläsning 7 och handlar om numerisk derivering och ordinära differentialekvationer (ODE).

**Numerisk derivering:** Vi kommer att undersöka olika approximationer av derivatan $y'(x)$.

**ODE:** Vi kommer att studera numerisk behandling av ordinära differentialekvationer dvs ekvationer som innehåller derivator av den okända funktionen $y(t)$.

## 2 Numerisk derivering

MATLAB-filer: *NumersikDerivering.m*

### 2.1 Kort introduktion

Derivatan av en funktion $y(x)$ defineras som

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Vi vill beräkna $y'(a)$ när $y(x)$ är känd i $x$-värdena $a, a+h, a+2h, \cdots$.

1. En god approximation till derivatan är framåtdifferenskvoten

   $$y'(a) \approx \frac{y(a+h) - y(a)}{h}$$

   Med taylorutveckling kan man visa att trunkeringsfelet är propotionellt mot steget h.

   $$\begin{aligned} \frac{y(a+h) - y(a)}{h} - y'(a) &= \frac{1}{h}(y(a) + hy'(a) + \frac{h^2}{2}y''(a) + \frac{h^3}{3!}y'''(a) + \cdots - y(a)) - y'(a) \\ &= \frac{y''(a)}{2}h + O(h^2) \end{aligned}$$

   Bestäm med hjälp av taylorutveckling hur stort trunkeringsfelet är för en approximation med centraldifferenskvoten

   $$y'(x) \approx \frac{y(a+h) - y(a-h)}{2h}$$

2. I *NumersikDerivering.m* visas en tredje approximation till derivatan som har samma noggrannhet som centraldifferenskvoten.

$$y'(a) \approx \frac{1}{2h}(-y(a+2*h)+4y(a+h)-3y(a))$$

Programmet beräknar $y'(7)$ då

$$y(x) = ((x-7)^{5/2} + 2sin(\pi\sqrt{x}))/(\sqrt{x+4ln(x-2\pi)}-1)$$

Det analystiskt beräknade derivatavärdet är $-1.68043$. Anpassa programmet så att derivatan approximeras med $h = 0.02, 0.01$ och $0.005$.
Visa med hjälp av programmet att trunkeringsfelet är proportionellt till $h^2$.

# 3 ODE

MATLAB-filer: *FramatEuler.m*, *RK4.m*, *Differentialek.m*, *HogreOrd.m*, *ford.m*

## 3.1 Kort introduktion

En ordinär differentialekvation (ODE) uttrycker ett samband mellan en funktion $y$ och dessa derivator i en enda variabel. Några exempel är

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + y + x\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dt} + 2y = t$$

Givet en funktion $f(t,y)$ och en startpunkt $(a, y_0)$ defineras ett begynnelsevärdesproblem av

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t,y) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned}$$

Sökt är $y(t)$ för $t > a$. Vi ska undersöka numeriska metoder som stegar fram i $t$-led med steglängd $h$ och beräknar en approximation $y_i$ till $y(t_i)$.

## 3.2 Framåt Euler

En enkel metod är att approximera derivatan av $y$ med en framåtdifferenskvot

$$f(t_i, y_i) = y'(t_i) \approx (y(t_i+h) - y(t_i))/h$$

Vi får en approximation $y_{i+1}$ till lösningen $y(t_i + h)$ då vi stegar fram ett steg från $y_i$.

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

Vi vet att noggrannhetsordningen hos en metod ges utav

$$etrunk \approx Ch^p$$

där $etrunk$ är trunkeringsfelet, $C$ en konstant, $h$ steglängden och $p$ noggrannhetsordningen.
*FramatEuler.m* löser begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y' &= -y && (1) \\ y(0) &= 1 && (2) \end{aligned}$$

på intervallet $0 \leq t \leq 2$. Den exakta lösningen är $e^{-t}$.
Hur beräknas noggrannhetsordningen i programmet? Vilken noggrannhetsordning har Framåt Euler?

### 3.3 Runge-Kutta metoder

I Eulers metod behövs bara en funkionsberäkning av $f$ i varje steg. Runge-Kutta-metoder gör flera och får därigenom högre noggrannhet. En känd metod är RK4, en fjärde ordnings Runge-Kutta metod, som använder sig av ett viktat medelvärde av fyra lutningsberäkningar.

$$\begin{aligned} f_1 &= f(t_i, y_i) \\ f_2 &= f(t_i + h/2, y_i + hf_1/2) \\ f_3 &= f(t_i + h/2, y_i + hf_2/2) \\ f_4 &= f(t_i + h, y_i + hf_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \end{aligned}$$

*RK4.m* löser

$$\begin{aligned} y' &= 1 + t - y \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

på intervallet $0 \leq t \leq 1$
Lös med hjälp av detta program differentialekvatinen

$$\begin{aligned} y' &= sin(ty) && (3) \\ y(0) &= 6 && (4) \end{aligned}$$

med steg $h = 0.1$ för att beräkna en approximation till $y(0.8)$.

### 3.4 *ode45*

I MATLAB finns flera differentialekvationslösare, bland annat *ode45* som är en variant av Runge-Kutta metoder med automatisk steglängdsregelering. Med *odeset* kan den relativa toleransen förändras (default är $10^{-3}$).
Använd *ode45* för att lösa (3) med en relativ tolerans av $10^{-8}$.

### 3.5 Ett differentialekvationssystem

(EX. Pohl s. 203) Ett radioaktivt ämne A sönderfaller till ett ämne B som i sin tur sönderfaller till C. Processen beskrivs av ett system av tre första ordnings begynnelseproblem:

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= -k_1 y_1, \quad y_1(0) = 100 \\ dy_2/dt &= k_1 y_1 - k_2 y_2, \quad y_2(0) = 0 \\ dy_3/dt &= k_2 y_2, \quad y_3(0) = 0 \end{aligned}$$

där $y_1$ står för mängden av ämne A, $y_2$ för B och $y_3$ för C. $k_1 = 3$ och $k_2 = 0.05$ är hastighetskonstanter för sönderfallet.
Funktionen *fsonderfall.m* saknas i *Differentialek.m* för att kunna beräkna $y_1$, $y_2$, och $y_3$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$. Implementera den.

## 3.6 Högre ordningens differentialekvationer

En andra ordningens differentialekvation $u'' = f(t, u, u'')$ med $u(0) = c$ och $u'(0) = d$ kan skrivas om till ett differentialekvationssystem av första ordning genom substitutionen $y_1 = u$ och $y_2 = u'$. På detta sätt får vi

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= u, \quad y_1(0) = c \\ dy_2/dt &= u'' = f(t, y_1, y_2), \quad y_2(0) = d \end{aligned}$$

Givet är $u''' = sin(tu) + u''\sqrt{1 + (u')^2}$ med begynnelsevillkoren $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ och $u''(0) = 0$. *HogreOrd.m* tillsammans med *ford.m* beräknar och ritar $u(x)$ för $0 \leq x \leq 2$.
Beräkna på samma sätt lösningskurvan $u(x)$ till differentialekvationen $u'' + 2xu' + u^2 = 0$ med begynnelsevillkoren $u(0.3) = 0.1$ och $u'(0.3) = 0.3$ för $0.3 \leq x \leq 10$.

## 3.7 ODE metoder för integration

Vi vill bestämma integralvärdet $\int_a^t f(s)ds$. Om vi sätter $y(t) = \int_a^t f(s)ds$ då gäller $\frac{dy}{dt} = f(t)$ och $y(a) = 0$. Integralproblemet har nu förvandlats till ett differentialekvationsproblem. Beräknar vi $y(t)$ så har vi bestämt integralvärdet. Beräkna med framåt Euler $\int_3^4 \frac{ds}{s-2}$ med steglängd $h = 0.01$ och kontrollera ditt resultat med *quad*.