Laboration 4: ODE, Finita Differensmetoden

1 Mål för denna laborationen

Lab 4 är tänkt som en förberedelse inför föreläsning 8 och 9 och handlar om stabilitetsanalys av numeriska metoder, flerstegsmetoder och finita differensmetoden.

Stabilitetsanalys: Vi kommer att undersöka beteendet av numeriska metoder vid användning på styva problem.

Finita Differensmetoden: Vi kommer att studera randvärdesproblem med hjälp av finita differensmetoden.

2 Absolutstabilitet

MATLAB-filer: *StabFE.m*, *StabBE.m*

2.1 Kort introduktion

En differentialekvation kallas styv om ekvationen innehåller flera olika väl separerade tidsskalor. Numeriska metoder kan bli instabila när man löser sådana problem. För att se hur en numerisk metod beter sig vid användning på styva ekvationer analyserar man metoden med testproblemet

$$y'(t) = \lambda \cdot y(t), \quad t \in (0, \infty) \tag{1}$$

$$y(0) = 1, \quad t = 0 \tag{2}$$

Låt oss fokusera på fallet när λ är ett negativt reellt tal. Den exakta lösningen är $y(t) = e^{\lambda t}$.
Då $\lambda < 0$ konvergerar den exakta lösningen till 0, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Om den numeriska lösningen y_n har samma gränsvärde, $\lim_{t\to\infty} y_n = 0$, så är metoden absolutstabil.
För att nå detta beteende ställs krav på steglängden h som vi ska undersöka i de följande uppgifterna.

2.2 Framåt Euler

Använder man Framåt Euler till (1) och (2) så får man

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n = (1 + h\lambda)^n y_0 = (1 + h\lambda)^n$$

för att $y_0 = 1$. y_n konvergerar mot 0 om $|1 + h\lambda| < 1$. För att få stabilitet för Framåt Euler måste alltså gälla $-2 < h\lambda < 0$.
StabFE.m löser (1) och (2) på intervallet $t \in [0, 10]$ med $\lambda = -1$. Testa *StabFE.m* med steglängd $h = 0.5, 1.0$ och 2.5. I sista fallet är lösningen inte avtagande, varför?

2.3 Bakåt Euler

För Bakåt Euler har vi

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\lambda y_{n+1} \\ y_{n+1} &= \frac{y_n}{1-h\lambda} = (\frac{1}{1-h\lambda})^{n+1} \end{aligned}$$

$lim_{n\to\infty} y_n = 0$ om $h > 0$.
Kör *StabBE.m* med samma steglängd som i Framåt Euler. Programmet visar egenskapen att implicita metoder ibland tillåter större steglängder h. Det gör dem attraktiva trots att de kräver mer arbete i varje steg.

2.4 Styva problem

Vi ska lösa problemet (3.5) av Lab 3 en gång till med en liten modifikation.
Ett radioaktivt ämne A sönderfaller till ett ämne B. Processen beskrivs av ett system av två första ordnings begynnelseproblem:

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= -k_1 y_1, \quad y_1(0) = 100 \\ dy_2/dt &= k_1 y_1 - k_2 y_2, \quad y_2(0) = 0 \end{aligned}$$

där y_1 står för mängden av ämne A och y_2 för B. $k_1 = 10^4$ och $k_2 = 10^{-4}$ är hastighetskonstanter för sönderfallet.
Den exakta lösningen är $y_1(t) = 100e^{-k_1 t}$ och $y_2(t) = 100k_1(e^{-k_2 t} - e^{-k_2 t})/(k_1 - k_2)$. Här är $e^{-k_1 t} < 0.5\cdot 10^{-43}$ redan för $t = 0.01$ och kan i y_2 anses försumbar jamfört med $e^{-k_2 t} \approx 1+10^{-6}$ när $t = 0.01$.
Kör *Styvproblem.m* tillsammans med *fsonderfallstyv.m* på intervallet $0 \leq x \leq 0.01$ med $h = 0.001$ och 0.00001. Exemplet visar att man med explicita metoder tvingas arbeta med ett jättelitet h även om y_1 inte har stort inflytande efter en kort tid.

3 Finita differensmetoden

MATLAB-filer: *randvardesproblem.m*

3.1 Kort introduktion

Randvärdesproblemet

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = a \quad u(1) = b, \tag{3}$$

kan lösas numerisk med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, 1]$ enligt $x_i = ih$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ där $h = 1/(n+1)$ och approximerar andraderivatan med centraldifferens:

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

erhålles ekvationerena

$$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f(x_i), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Tillsammans med randvillkoren $u_0 = a$ och $u_{n+1} = b$ leder diskretiseringen till ett linjärt ekvationssystem

$$Au = b,$$

där A är en $n \times n$-matris u är en n-vektor med lösningsvärdena i det inre av intervallet och b är en n-vektor som beror av bla randvärdena u_0 och u_{n+1} samt h och $f(x_i)$-värdena.

Vi ska här studera randvärdesproblemet 3 med villkoren

$$a = 1, \quad b = -1 \quad \text{och} \quad f(x) = (3\pi)^2 \cos(3\pi x). \tag{4}$$

3.2 Randvärdesproblem

- Visa att $u(x) = \cos(3\pi x)$ är analytisk lösning till randvärdesproblemet (3) med villkoren(4).
- Skriv ner matrisen A för $n = 4$ med papper och penna. Vilken struktur har matrisen A?
- Skriv ett litet program som för ett givet n-värde skapar matrisen A i Matlab. Hint: För att skapa A kan man använda funktionerna **diag(v)** som genererar en diagonalmatris med vektorn v på diagonalen, generaliseringen **diag(v,p)** som genererar en kvadratisk matris med vektorn v på diagonal nummer p, och **ones(n,1)** som genererar en n-vektor med ettor.
- Matlabfilen *randvardesproblem.m* är ett påbörjat program för att lösa randvärdesproblemet numerisk, men kodraderna (eller raden) för att skapa matrisen A fattas från programmet (se raden 15). Slutför programmet genom klippa in raderna ni har skrivit i deluppgift **c)** för att skapa A in i *randvardesproblem.m* (på rad 15).

  randvardesproblem.m bestämmer u genom att lösa det linjära ekvationssystemet $Au = b$ för $n = 5, 10, 20$ och 40 delintervall och i Figur 1 plottas respektive lösningar och den analytiska lösningen $u(x) = \cos(3\pi x)$. Uppskatta med ögonmått noggrannheten i de numeriska lösningarna.