

Slutprojekt DN1240

CL

- 3A.1 Skarabén — den heliga pillerbaggen
- * 3A.3 Kulorna — kulörta kulor på ett snöre
- 3A.4 Krocken — cyklist och fotgängare på kollisionskurs
- * 3A.6 Orunda hjul — ovalt kedjehjul på cykeln
- 3A.8 S-et och vattenrutschbanan — splines i 2D och 3D
- 3A.11 Piriformen — välformad väska för bouleklot
- 3A.12 Splinebilen — häftig bilkaross
- * 3A.14 Havsytan — buktning över ett undervattensberg
- * 3A.18 Klädlinan — tvätt hängd på töjd lina
- * 3A.20 Åskledaren — ekvipotentialproblem
- 3A.22 Bassängen kakel och vatten i snygg design
- 3B.1 Varpan — gotländsk kastsport
- 3B.2 Metallröret — het vätska i rör
- 3B.3 Inversa pendeln — uppåtriktad pendelrörelse
- 3B.4 Futten — rymdskeppet illa ute
- 3B.5 Strömkretsen — elektriskt svängningsförlopp
- 3B.6 Käppen som knäcks — hårt tryck på en knölig käpp
- * 3B.7 Partikeln — bana i elektromagnetiskt fält
- * 3B.8 Pilbågen — böjlig linjal krökt till pilbåge
- * 3B.9 Strömningen — strömhastighet intill en vägg
- 3B.12 Ljudvågor — sändare och mottagare under vattnet
- 3B.13 Vindkastet — bollkast i sidvind
- * 3B.15 Glödtråden — tråd, het på mitten och kall i ändarna
- 3B.16 Satelliten — kretslopp kring jorden och månen
- * 3B.17 Struthatten — stjärngossestrut och kräfthatt
- * 3B.18 Teslattrasslet — snurrig bana i magnetfält
- * 3B.19 Dubbelpendeln — här svänger det rejält
- * 3B.20 Färgränder — utspridd färg i randigt medium
- * 3B.21 Kometsvansen — stoftsvans av kometdamm
- * 3B.22 Diffraktionsmönster — av kant, spalt, strå

* = svårare uppgift

3A.1: Skarabén — den heliga pillerbaggen

I gamla Egypten gjordes avbildningar av den tordyveliknande heliga pillerbaggen *Scarabaeus sacer*. Dessa så kallade skarabéer användes som amuletter och man lade dem ofta på mumiens bröst. I matematiken beskrivs skarabékurvor av ekvationen

$$(x^2 + y^2 + ay)^2(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)^2 = 0$$

där a är en formbestämmande parameter. I polära koordinater blir skarabéformeln trevligare: $r = \cos 2\varphi - a \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. (Obs! r antar även negativa värden.) Härled formeln. Rita upp skarabéer för a -värdena 0, 0.5, 1, 1.5, 2 och se hur formen beror av a . Beräkna totala omkretsen för var och en av dessa skarabéer — använd en effektiv numerisk metod för integration av båglängdsformeln i polära koordinater. Motivera din integrationsmetod.

Använd ekvationslösning för att bestämma och rita upp den skarabé som har en omkrets på precis tio längdenheter. Denna pillerbagge (med det erhållna a -värdet) är basmodell för fortsatta studier. För att kunna måla skarabéns kropp, huvud och vingar i olika färger måste man först känna till alla φ -värden där r är noll. Bestäm dem och använd `fill`-kommandot för målningen.

Betrakta i fortsättningen både denna symmetriska skarabé samt en något förvanskad och osymmetrisk skarabé som definieras av uttrycket

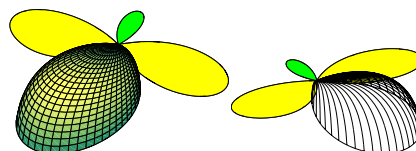
$$r = (\cos 2\varphi - a \sin \varphi)(1 - \frac{1}{9} \sin K\varphi),$$

där K är ett jämnt heltal. Pröva både $K = 4$ och $K = 6$. Skarabén uppfyller att $|r|$ har maximum på fyra ställen. Bestäm dessa punkter med gyllenesnittetsökning.

Från huvudets $|r|_{max}$ -position utgår Atons livgivande strålar, en genom vardera vingens $|r|_{max}$ -punkt och en tredje stråle ned till $|r|_{max}$ -punkten på bakkroppen. Strålarna bildar tillsammans med skarabén en variant av livssymbolen *ankh*. Rita hela ankh-symbolen.

Varje vingstråle går genom ytterligare en punkt på vingen. Bestäm positionerna för både vänstra och högra vingens skärningspunkter och markera dem.

Skapa slutligen en tredimensionell pillerbagge. Huvudet och vingarna kan behållas plana, medan kroppen ska konstrueras av en uppsättning kvadratiske bézierkurvor som alla startar i origo, alltså $\mathbf{p}_1 = (0, 0, 0)$. Låt varje bézierkurva finnas i ett vertikalkalplan som för den j -te kurvan skär xy -planet längs linjen från origo till en punkt $\mathbf{p}_2 = (x_j, y_j, 0)$ på skarabén. Ge lämplig placering av styrpunkten så att den ligger i vertikalkalplanet och dessutom skapar lagom välvning på pillerbaggskroppen. För 3D-ritningen behövs `plot3` och `fill3`, eventuellt också `surf` (i vänstra figuren nedan).



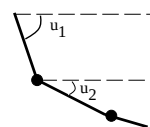
3A.3: Kulor på ett snöre

Anna har kulörta kulor av blandade storlekar i en låda. Hon väljer ut några kulor (mellan fem och tio stycken), fäster dem på ett rött sidenband med varierande avstånd och knyter fast bandets båda ändar på lika höjd i köksfönstret. Uppgiften är att rita upp Annas fönsterdekoration.

Teori: Häng bandet i x -axeln mellan origo och $x = a$ och låt antalet kulor vara n med massorna $m_1, m_2, \dots, m_n$. Kulorna är så tunga att sidenbandets vikt är försumbar. Bandlängderna är $L_1, L_2, L_3, \dots, L_N$ där $N = n+1$. Summan av bandlängderna måste förstås vara större än avståndet a mellan upphängningspunkterna. Det är lämpligt att som obekanta införa de N vinklarna $u_1, u_2, \dots$, enligt figuren. Vinklarna uppfyller: $\pi/2 > u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_N > -\pi/2$. Motivera det!

Rent geometriskt måste följande samband gälla (motivera!)

$$\sum_{i=1}^N L_i \cos u_i = a, \quad \sum_{i=1}^N L_i \sin u_i = 0$$



Spännkraften S i varje bandstump har horisontell och vertikal komponent. Jämvikt kräver att

$$\begin{aligned} S_i \cos u_i &= S_{i+1} \cos u_{i+1}, & S_i \sin u_i &= S_{i+1} \sin u_{i+1} + m_i g \\ S_{i+1} \cos u_{i+1} &= S_{i+2} \cos u_{i+2}, & S_{i+1} \sin u_{i+1} &= S_{i+2} \sin u_{i+2} + m_{i+1} g \end{aligned}$$

Elimineras S_i, S_{i+1} och S_{i+2} ur dessa ekvationer fås följande samband (motivera!)

$$m_{i+1} \tan u_i - (m_i + m_{i+1}) \tan u_{i+1} + m_i \tan u_{i+2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-2.$$

Dessa kraftsamband utgör tillsammans med de båda geometriska villkoren ett icke linjärt ekvationssystem för bestämning av vinklarna. Lös det!

Alternativ algoritm som också ska prövas: En idé är att med variabelbyte åstadkomma att ekvationssystemet till största delen blir linjärt. Då skulle det räcka att gissa två värden (t ex u_1 och u_N) och beräkna de övriga med **tridia**. För de båda återstående ekvationerna kan man inte längre beräkna derivatorna analytiskt, men en modifierad Newton med två-gångs-två Jacobianen approximerad av differenskvoter borde gå bra. Utveckla detta till en användbar algoritm och beräkna alla vinklarna.

Kulförsvinnandeproblemet återstår att lösa: Annas pyrotekniskt intresserade pojkvän har i hemlighet preparerat bandet och kulorna och vid nyårsfirandet tänder han på bandet i origo. Det brinner sakta som en stubin utan att gå sönder, men varje gång lågan passerar en kula exploderar kulan och sprider färggrann konfetti över festdeltagarna. Rita upp de olika former kulbandet antar när kula efter kula försvinner, tills så få kulor är kvar att bandet inte hålls sträckt längre.

När detta inträffar kommer bandet att anta kedjekurveform:

$$y(x) = a_f \cosh \frac{x - x_0}{a_f} - a_f + y_0$$

där x_0 och y_0 är koordinaterna för lägsta punkten och a_f är formparameter. Beräkna och rita upp hur bandets form förändras då återstående kulor försvinner en efter en.

Annas dekorationsdata: $a = 80$, $\mathbf{L} = [23 \ 10 \ 15 \ 6 \ 20 \ 8 \ 18 \ 15]$, $\mathbf{m} = [7 \ 2 \ 5 \ 3 \ 1 \ 9 \ 4]$.

Du ska dessutom lösa problemet för en egen uppsättning data med andra bandlängder och kulmassor (minst sex olika tunga kulor ska snöret ha).

3A.4: Krocken

I Axelby ligger torget i origo och tvärs genom byn går den alldeles raka X-gatan. Ytterligare en väg leder genom byn, det är den slingriga gamla landsvägen Y-slingan (numera cykelväg) som korsar X-gatan med allt tätare intervall mot utkanten av byn. Y-slingan följer formeln

$$Y(x) = \alpha e^{-\beta x} \sin(x^2).$$

Genom följande positionsangivelser kan Y-slingans parametrar α och β bestämmas.

x	0.50	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50
y	0.13	0.40	0.48	0.36	0.03	-0.35	-0.43	-0.01	0.42	0.18	-0.38	-0.13

Osquar börjar sin kvällspromenad vid torget och promenerar med raska steg och konstant hastighet längs X-gatan ut från byn. Vid gatlyktan som finns i första vägkorsningen efter torget tittar han på klockan, den är kvart i nio.

Maggan är samtidigt ute på cykeltur på Y-slingan. På sin artonväxlade hoj far hon fram ganska precis två och en halv gång så snabbt som Osquar går. I en av alla dessa vägkorsningar möts de två och undviker med en hårsman att kollidera i mörkret (så här långt från torget finns inga gatlyktor längre). Skattande sig lyckliga fortsätter Osquar och Maggan på var sin väg med oförminskad hastighet. Men i nästa korsning är krocken ett faktum!

Krockplats? Hastighetsförhållande? Var befann sig Maggan kvart i nio?

Ur informationen ovan är det möjligt att bestämma krockplatsen och finna det verkliga hastighetsförhållandet q mellan Maggan och Osquar. Hur nära 2.5 hamnar det? (En hel del båglängdsberäkningar krävs där integrationsgränserna utgörs av nollställen till uttrycket för Y-slingan.)

Ytterligare en fråga ska besvaras: I vilken punkt på Y-slingan befann sig Maggan då klockan var kvart i nio? Hennes position vid denna tidpunkt bestäms av sambandet $\text{Magganväg} = q \cdot \text{Osquarväg}$. Lös med en effektiv ekvationslösningsalgoritm; tänk också på att vara smart i det iterativa förfarandet så att varje ny båglängdsberäkning endast behöver utföras över ett kort integrationsintervall.

Gör noggrannhetsbedömning av resultatet med hänsyn tagen till de numeriska metoder som du använt.

Vid rekonstruktionen av olyckan kom det fram att Maggan alltid sneddade i kurvorna så att hon i själva verket följde $y(x) = C \cdot Y(x)$ med ett C -värde strax under ett. Först ryktas det att $C = 0.96$. Hur mycket påverkar det resultaten (q -värdet och Maggans läge kvart i nio)? Någon säger sedan att Maggan sneddar värre än så, $C = 0.92$ ligger nog närmare verkligheten. Hur mycket påverkas resultaten av denna förmodan?

Rita X-gatan, Y-slingan och Maggans sneddade färdväg i fallet $C = 0.92$, markera krockplatsen och Maggans läge klockan kvart i nio i de olika fallen.

3A.6: Orunda hjul

På Tekniska museet finns en kugghjulsdrift med ovala hjul. Det finns också cyklar med ovala kedjehjul. Idén är att man ska få det lättare i trampornas vändlägen där man har liten momentarm, och ta igen det i ytterlägena där momentarmen är som störst. Uppgiften är att studera hur omkretsen av konvexa höljet varierar med vinkeln α för följande givna hjul. Det elliptiska hjulets ekvation är för $\alpha = 0$: $\mathbf{r}(\phi) = (a \cos \phi, b \sin \phi)^T$ med $a = 3$ och $b = 1.5$. Då hjulet vrids vinkeln α blir ellipsekvationen $\mathbf{r}_e(\phi) = \mathbf{S} \mathbf{r}(\phi)$ där $\mathbf{S}$ är vridningsmatrisen $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

På avståndet $L = 6$ längs x -axeln finns ett cirkulärt hjul som i parameterform har ekvationen $\mathbf{r}_c(u) = (L + c \cos u, c \sin u)^T$ med $c = 1$.

För att vi ska kunna beräkna hela omkretsen av konvexa höljet, betraktat som ett omgivande elastiskt sträckt band, måste bandets tangeringspunkter på cirkeln och ellipsens ovansida först bestämmas. Sambanden kan skrivas som ett ickelinjärt ekvationssystem (obekanta är vinkeln u på cirkeln och parametern ϕ på ellipsen). Motsvarande görs för tangeringspunkterna på undersidan av hjulen.

Omkretsen består av fyra delar. De rätta linjestyckenas längder och cirkelbågpartiet är lätta att beräkna, men den delen av bandet som löper längs ellipshjulet kräver en numerisk integralberäkning. Rita upp omkretsen av konvexa höljet för α i intervallet $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ till exempel med steget $d\alpha = \pi/24$.

Om det är en otöjbar kedja som omger hjulen, hur stort slack uppstår?

Vidareutveckling: Man skulle kunna tänka sig en konstruktion som låter axelavståndet L variera med vinkeln α så att kedjan hela tiden hålls sträckt och har längden lika med maximala omkretsen ovan. Det gäller alltså att $L(\alpha) \geq 6$, och det maximala L -värdet uppträder då $\alpha = 0$. Beräkna $L_{\max}$ med ekvationslösning. Beräkna och rita upp axelavståndet $L(\alpha)$ i intervallet $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (med samma steg $d\alpha = \pi/24$ som tidigare utnyttjats).

3A.8: S-et, åttan och vattenrutschbanan

Matematisk typografi, dvs matematisk beskrivning av formen på bokstäver och siffror, har mer än 600-åriga anor — äldst är förmodligen Felice Felicianos skrifter från omkring år 1460 i Vatikanbiblioteket. Donald Knuth har skrivit en mycket intressant artikel¹ om matematisk typografi i boken *TEX and METAFONT* från 1979.

Det numeriska verktyg som du ska utnyttja för att formge bokstaven S är naturliga kubiska splines (MATLABs inbyggda splines duger inte). Utgå från nio punkter på en handritad S-kurva. Välj punkterna så att avstånden mellan dem blir ungefär lika stora. Det gäller att använda parametriska splines där $x = x(u)$ och $y = y(u)$ är funktioner av den monotont växande parametern u . Låt u vara noll i startpunkten och sedan anta värdena 1, 2, ..., 8 i de följande punkterna. Skriv upp en tabell med u -, x - och y -värdena för de nio punkterna (redovisas i rapport och föredrag).

För att åstadkomma tätare tabellering, alltså skaffa mellanliggande kurvpunkter på S-et, ska du göra splinesinterpolation på vardera x och y som funktion av u .

Att använda båglängden som parameter u vore idealiskt men är inte särskilt praktiskt användbart. Den valda parametern u är ungefär proportionell mot båglängden och leder till enkla räkningar.

Rita upp kurvresultatet (x, y) av splinesinterpolationen. Blir bokstaven snygg? Någon av de givna punkterna behöver kanske justeras lite för att S-et ska bli ännu vackrare. Upprepa tills du är nöjd och beräkna därefter längden L_s av hela S-kurvan med stor noggrannhet (noggrannhetsbedömning krävs!).

En lutande åtta — ungefär så här: 8 — ska skapas av kubiska splines, men med hjälp av periodisk kubisk splinesinterpolation i stället för naturliga splines. Utgå även här från nio interpolationspunkter. Ekvationssystemet som bestämmer lutningarna kommer att få annorlunda första och sista rad på grund av den önskade periodiska egenskapen hos åttakurvan. Beräkna och rita åttan och ange dess omkrets.

Vattenrutschbanan: Nu gäller det att åstadkomma en vattenrutschbana som startar 8.5 meter ovan vattenytan i punkten (3, 4, 8.5) och därefter passerar genom följande punkter: (7, 8, 6.7), (11, 2, 5.5), (6, 7, 4.4), (6, 0, 3.5), (10, 5, 2.5), (4, 10, 1.7), (0, 5, 1.0), (4, 0, 0). Utnyttja även här interpolation med parametriska naturliga kubiska splines på samma sätt som vid S-et men nu i tre dimensioner. Beräkna med stor precision längden av rutschbanan.

Den erhållna banan uppnår inte den av badhusrådet angivna åklängden som är 65 meter. Utrymmet för rutschbanan är sådant att inga ändringar får ske i x -led och i z -led, däremot anses det tillrådligt att skala om alla y -värden med en faktor β .

Formulera en ekvation och använd lämplig iterativ metod för att beräkna skal faktorn β . Rita de nio stolparnas nya placering med `stem3` och visa vattenrutschbanan i några olika vyer.

¹Några klipp ur artikeln kan du få av kursledaren. För Knuth själv var bokstaven S knepigast, läs hans kommentarer.

3A.11: Piriformen och boulevardskan

En piriformkurva definieras av ekvationen $x^4 - x^3 + y^2/b^2 = 0$ för $0 \leq x \leq 1$. Rita upp några piriformer för b -värden mellan ett och tre. Namnet piriform betyder päronform — för vilket b -värde passar namnet bäst?

En moderiktig boulespelare bär helst sina bouleklot (med radien R) i en väska med plana parallella sidor (planen $z = R$ och $z = -R$) som är piriformytor med b -värdet 1.8. Bärhandtaget finns i origo och väskans utsträckning i x -led är en längdenhet.

Standardväskan innehåller två bouleklot. Kloten kan inte rulla omkring i väskan, utan de nuddar varandra och tangerar dessutom väskans kurviga sarg på två ställen vardera. Problemet blir att bestämma klotens radie och placering i väskan — mittpunktskoordinater: $(a, R, 0)$ och $(a, -R, 0)$.

Betrakta genomskärningen i planet $z = 0$ som innehåller två cirklar och en omgivande piriform. Cirkeln i övre halvplanet tangerar piriformkurvan i två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) . Sex obekanta finns: tangeringspunkternas koordinater samt a och R . Ställ upp sex samband och lös det icke linjära ekvationssystemet. Det går att reducera antalet obekanta, men då kommer man inte ifrån rotuttryck i ekvationerna vilket komplicerar deriveringen.

Till boulespelet hör en liten målkula som brukar kallas lillen eller grisen. Det finns olika tänkbara placeringar för den i piriformväskan. Om den liksom de båda övriga kloten ska ha centrum i planet $z = 0$, finns ett lagom utrymme för lillen mellan de båda boulekloten och väskans kant vid $x = 1$ (problemet betraktat som ett 2D-problem i planet $z = 0$). Beräkna största möjliga radie för lillen och räkna ut kvoten mellan lillens radie och bouleklotens radie.

Om boulevardskan med sina bouleklot ritas i 3D ser man att målkulan kan göras större om den flyttas ned i z -led. Förutom att nudda kanten $x = 1$ får den tangerar planet $z = -R$. Räkna ut lillens maximala radie r_{lill} i detta fall och kvoten r_{lill}/R . Passa på att lägga in en reservmålkula som tangerar planet $z = R$ också. Visa en tredimensionell bild av kloten och den omgivande piriformväskan.

Nu gäller det att åstadkomma en lyxväska med samma piriformkontur som standardväskan, men lyxboulevardskan ska innehålla tre bouleklot och en målkula. Alla boulekloten ska ha centrum i planet $z = 0$ och alla ska naturligtvis vara lika stora. Prova att placera målkulan på samma sätt som i standardväskan. Beräkna och rita lyxväskan.

3A.12: Splinebilen och andra rymdytor

I ett rektangulärt område i xy -planet är gitterpunkter givna i ett rutnät av ekvidistanta x - och y -värden. I varje gitterpunkt är höjdvärdet känt, det innebär att vi har en indata-matris $\mathbf{z}$ med n_x kolumner och n_y rader. I uppgifterna nedan gäller det att beräkna och rita rymdytor som interpolerar genom alla givna z -värden och som är uppbyggda av naturliga kubiska splines (alltså inte MATLAB-splines).

Ett **landskap** har höjderna z uppmätta för x - och y -värden med $h_x = h_y = 1$ i ett 7×5 rutnät. Använd **stem3** för att åskådliggöra data. Skapa ett mjukt böljande landskap; använd steget $dt=0.2$ för den lokala variabeln t . Med **surf** får man förutom rymdytan också nivåkurvor utritade. Men **meshz** passar kanske bäst för uppritningen ändå? Studera landskapet från olika synvinklar med **view**-kommandot.

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Beräkna hela volymen som landskapet upptar, räknat från marknivån $z=0$. Det blir en dubbelintegral där analytisk eller numerisk integration kan användas i x -led (snittareor vid fixt y), därefter numerisk integration i y -led. Kontrollera tillförlitligheten i volymvärdet genom omräkning med finare indelning av dt (halverat steg rekommenderas).

Bilkarosskonstruktion

Nu ska du skapa en splinebil och till ditt förfogande finns de två matriserna nedan för bilens framparti och bakparti:

$$\mathbf{z1} = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 2.2 & 4.2 & 5 & 5.4 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 1.5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z2} = \begin{pmatrix} 4 & 4.5 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 8 & 2.5 \\ 9 & 10 & 9 & 3 \\ 8 & 9 & 8 & 2.5 \\ 4 & 4.5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

För fronten består gittret av x -värdena $-2, -1, 0, 1, 2$ och $y = 0, 1, 2, 3$. För bakpartiet är x -värdena desamma, men y -värdena är nu $3+a, 4+a, 5+a, 6+a$, där a sätts till till exempel till 0.7 för att åstadkomma lutande vindruta. Bygg upp en splineyta för vardera bilens fram- och bakparti, $\mathbf{Z1}$ och $\mathbf{Z2}$. Skapa därefter en totalmatris för bilen, $\mathbf{Z}_{tot} = [\mathbf{Z1} \ \mathbf{Z2}]$ och rita upp bilkarossen.

Ett alternativ till naturliga splines är "fusk-splines", dvs hermiteinterpolation med givna derivator i start- och slutpunkt och centraldifferenskvot för de övriga derivatorna. Utnyttja detta i x -led: Ge ett stort värde på startderivatan (och av symmetriskäl lika stort men negativt värde på slutderivatan) för varje kurva. Experimentera dig fram.

Komplettera uppgiften med lite större indata-matriser och formge en egen ännu vackrare splinebilkaross!

3A.14: Havsyntans buktning över ett undervattensberg

Gravitationen från en kropp ger upphov till en potential. Kring en sfärisk kropp blir ekvipotentialytorna sfäriska. En ostörd vattenyta ställer in sig så att den följer en ekvipotentialyta. Om jordklotet vore en perfekt sfärisk kropp helt täckt av hav skulle havsytan alltså utgöra en perfekt sfär, men så är inte fallet. Man har upptäckt områden i oceanerna där havsytan på grund av gravitationspåverkan från stora undervattensberg ligger många meter över normalnivån.

Uppgiften är att beräkna vattenytans buktning över ett undervattensberg som står på en i övrigt plan havsbotten i ett område där havsdjupet är $H = 10000$ meter. Densiteten för det järnhaltiga berget är $\rho_b = 7870$ och vattendensiteten är $\rho_v = 1000$. Berget antas vara rotationssymmetriskt kring z -axeln med höjden $z_{topp} = 9800$ m och med basradien $R = 8000$ m vid havsbotten (planet $z = 0$). Undersökningen ska utföras dels för ett konformat berg, dels för ett berg format som en halv ellipsoid.

Utnyttja cylinderkoordinater (r, φ, z) för potentialberäkningen. Eftersom problemet är rotationssymmetriskt kommer potentialen i en punkt att vara φ -oberoende och endast bero av höjden ovanför planet $z = 0$ och avståndet från symmetriaxeln. Potentialen Q i en punkt (r_p, z_p) bestäms av

$$Q(r_p, z_p) = (z_p - H)g - (\rho_b - \rho_v)G \cdot I(r_p, z_p)$$

där $g = 9.80$ är tyngdaccelerationen och $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ är gravitationskonstanten. $I(r_p, z_p)$ är integralen $\int \int \int \frac{dV}{s}$, där s betecknar avståndet från $(r_p, 0, z_p)$ till en punkt (r, φ, z) inuti berget, och integrationen tas över hela bergvolymen.

Trippelintegralen kan uttryckas

$$I(r_p, z_p) = 2 \int_0^\pi \int_0^{z_{topp}} \int_0^{q(z)} \frac{r}{\sqrt{(r \cos \varphi - r_p)^2 + r^2 \sin^2 \varphi + (z - z_p)^2}} dr dz d\varphi$$

Härled integranduttrycket! Integrationsgränsen $q(z)$ är bergets radie vid höjden z .

Utnyttja trapetsregeln för all numerisk integration, förslagsvis med 100 eller 200 delintervall i r -led och 300 i z -led. Integranden är en snäll periodisk funktion av φ och det bör räcka med fyra delintervall i $0 \leq \varphi \leq \pi$. (Motivera detta genom experimentell noggrannhetsbedömning.)

Beräkna potentialen $Q(r_p, z_p)$ i ett antal punkter strax ovanför den ostörda havsytenivån, till exempel vid $z_p = H + j$ för $j = 1, 2, \dots, j_{max}$, där j_{max} får vara 5 i fallet konformat berg, men måste ha ett högre värde i fallet ellipsoidformat berg.

Låt det radiella avståndet r_p anta värdena 0, 500, 1000, 2000, 4000, 6000, 10000, 20000, 40000, 60000.

Använd MATLABs `contour` för att rita ekvipotentialkurvor.

Intressantast är förstås nollpotentialkurvan. Hur högt över den ostörda havsytan hamnar den? Ur contour-figuren kan den utläsas tämligen väl. Utnyttja ekvationslösning för att med större noggrannhet bestämma nollpotentialhöjderna vid de tio r_p -värdena.

Lägg slutligen en fusk splinekurva genom de erhållna punkterna för att åstadkomma en mjukare nollpotentialkurva.

3A.18: Kläddlinan

En tvättlina med längden 2.5 meter är elastisk med fjäderkonstanten k . På den osträckta linan mellan punkterna $(0, 2)$ och $(2.5, 2)$ finns n stycken krokar (knutpunkter) på inbördes lika avstånd $L_x = 2.5/(n+1)$, där man hänger galgar med olika tunga plagg. Plagget på den i -te kroken har tillsammans med galgen och kroken massan m_i .

Kraftsambanden kring varje knutpunkt ger ett ickeinjärt ekvationssystem med $2n$ ekvationer för att bestämma de $2n$ obekanta x - och z -värdena för knutpunkterna. Låt den i -te punkten betecknas $\mathbf{H}$ (= here), dess västra granne $\mathbf{W}$ och dess östra granne $\mathbf{E}$. Den töjda linan mellan $\mathbf{W}$ och $\mathbf{H}$ har längden $L_W = \|\mathbf{W} - \mathbf{H}\|_2$.

Vid punkten $\mathbf{H}$ lyder kraftekvationen:

$$\mathbf{S}_W + \mathbf{S}_E - m_H g \mathbf{e}_z = 0$$

där $\mathbf{S}_W = k(1 - L_x/L_W)(\mathbf{W} - \mathbf{H})$, och $\mathbf{S}_E$ erhålls genom att byta W mot E .

Lös det erhållna ickeinjära ekvationssystemet med Newtons metod och utnyttja differenskvoter som approximation till jacobianelementen.

Testdata: Fjäderkonstanten $k = 250$, tyngdaccelerationen $g = 9.81$, antalet krokar $n = 5$. Plaggens vikt (i kg): $m_1 = 0.4$, $m_2 = 0.1$, $m_3 = 0.4$, $m_4 = 0.7$, $m_5 = 0.2$.

Rita resultatet! Undersök också hur mycket maximala nedhängningen påverkas, då plaggen byter plats på linan.

Pröva sedan andra n -värden och upphängda plagg med andra vikter.

3A.20: Åskledaren

En ledande vertikal pelare formad som en halv ellipsoid tas som modell för en åskledare. Uppgiften är att beräkna ekvipotentialkurvor runt åskledaren under ett åskväder. Potentialen är noll på åskledarens yta och i det horisontella planet (jorden) $z = 0$. Ellipsoiden beskrivs av följande ekvation med $a = 1$, $b = 2$, $c = 100$, $z \geq 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

Fördelen med att räkna på en ellipsoidisk ledare i stället för en mycket tunn cylinder är att potentialen V i punkter i rymden utanför ellipsoiden kan skrivas som ett explicit uttryck enligt formeln

$$V(x, y, z) = E z \frac{G(p)}{G(\infty)} \quad \text{eller} \quad G(p) - V \frac{G(\infty)}{E z} = 0 \quad (2)$$

E är fältstyrkan på stort avstånd från åskledaren; åskmolnet betraktas som oändligt avlägset och med oändlig utsträckning. Lämpligt värde är $E = 200$ V/m. Funktionen $G(p)$ är integralen

$$G(p) = \int_0^p \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{u}{a^2})(1 + \frac{u}{b^2})(1 + \frac{u}{c^2})^3}} du \quad (3)$$

och mellan x , y , z och p finns sambandet

$$\frac{x^2}{a^2 + p} + \frac{y^2}{b^2 + p} + \frac{z^2}{c^2 + p} = 1 \quad (4)$$

På planet $z = 0$ och på åskledarens yta där $p = 0$ gäller $V = 0$. Ekvipotentialkurvor önskas för potentialerna 125, 250, 500, 1000, 2000 V, dvs $V_j = 2 V_{j-1}$.

Börja med att beräkna värdet $G(\infty)$ och visa med analytisk betraktelse att värdet har minst fem korrekta siffror.

Ur sambandet (2) kan p -värdet för given potential V_j och given höjd z_i bestämmas. Det blir ekvationslösning som kompliceras av att integralen (3) ingår. När alla p -värden är kända kan ekvipotentialkurvorna erhållas genom formel (4).

För att kurvorna i vertikalplan inte ska bli kantiga behövs många z -värden. Ta till exempel steget $\delta z = -0.5$ från $z = 100$ till $z = 95$, sedan förslagsvis $\delta z = -5$ ned till $z = 20$ och därefter lite tätare igen till slutvärdet $z = 10$ (eller lägre).

Eftersom ett stort antal p -beräkningar behöver utföras och var och en innehåller ekvationslösning med integralberäkning är det nödvändigt med en effektiv algoritm. Bra startvärden gör ekvationslösningarna snabbare. En god idé kan vara att beräkna och lagra p -värdena i en matris i ordning från små till stora värden och utnyttja ett tidigare resultat som startvärde, till exempel så här:

Börja vid högsta höjden z_1 och lägsta potentialen V_1 och beräkna $p_{1,1}$ ur ekvation (2). Därefter beräknas $p_{1,j} = p(z_1, V_j)$ för $j = 2, 3, 4, 5$. Fortsätt med nästa rad i matrisen: Bestäm $p_{2,1}$ med $p_{1,1}$ som startgissning, beräkna sedan $p_{2,j}$ för $j = 2, 3, 4, 5$, och så vidare.

Obs! Lösning finns endast om $V_j/E z_i < 1$. Om z_i är litet och V_j är stort finns ingen rot till ekvationen. Förklara varför!

Med hjälp av formel (4) kan nu ekvipotentialkurvorna beräknas och ritas. I horisontella plan blir det kurvor av känt slag; rita upp några, t ex vid $z = 100, 95, 80, 40$. I vertikala plan får kurvorna en mer komplicerad form; rita sådana i de tre vertikalplanen $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

En tredimensionell bild med ekvipotentialytor är trevlig men inte obligatorisk.

3A.22: Bassängen

Familjen Persson har bestämt sig för att anlägga en snyggt designad swimmingpool på sin villatomt på en kvadratisk yta som är tio gånger tio meter. Ditt vinnande förslag är en bassängform som bestäms av området mellan två kurvor $y = c(x)$ och $y = d(x)$ för $0 \leq x \leq 10$. Ett trädäck läggs intill bassängen för att fylla det 100 m^2 stora utrymmet.

Polynomkurvan $y = c(x)$ bestäms genom interpolation i punkterna $(0, 4)$, $(2, 1.8)$, $(4, 2.6)$, $(7, 1.5)$ och $(10, 4)$. Kurvan $y = d(x)$ definieras av $d(x) = 9 - 0.15(x - 5)^2$.

Eftersom poolen ska passa både barn och vuxna låter du den få en mjukt formad buktig botten enligt $z = -F(x, y)$ där

$$F(x, y) = (1.2 + (y - 0.1y^2 - 0.5) \sin x) e^{-((x-6)^2 + (y-5)^2)/8} + 1.$$

Uttrycket är symmetriskt i y -led omkring $y = 5$. För att finna bassängens djupaste och grundaste platser går det därför bra att arbeta med funktionsuttrycket $F(x, 5)$. Bestäm dessa positioner med stor noggrannhet.

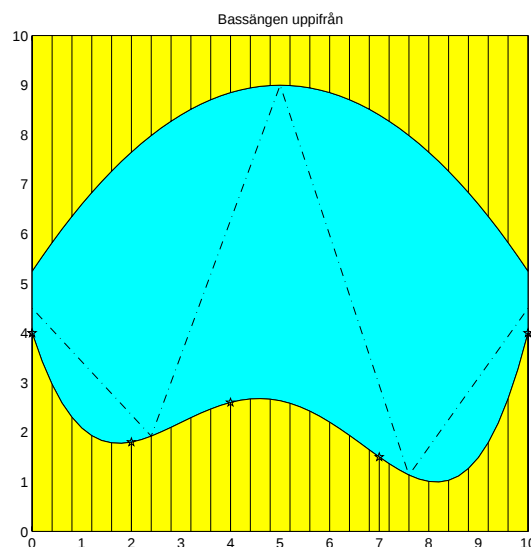
Familjen Persson undrar hur mycket vatten som ryms i bassängen om den fylls helt och hållet. Det blir en dubbelintegralberäkning som kräver numeriska metoder.

Perssons funderar på att ha mosaikkakel på hela den buktiga bottenytan. Hur många kvadratmeter kakel kommer det att krävas?

Om familjen har råd ska de vertikala bassängväggarna också få bli kakelklädda. Hur stort parti kakel måste köpas till?

Att bestämma hur många kvadratmeter som trädäcket kommer att uppta tror Perssons att de kan räkna ut själva, men det är nog bäst att du hjälper dem med det också.

När bassängen är färdig tar mamma Persson varje morgon en liten simtur. Hon hoppar i (eller kliver ner för badstegen) vid $(0, 4.5)$ och simmar i en sicksackbana via punkterna $(x_p, c(x_p))$, $(5, d(5))$, $(10 - x_p, c(10 - x_p))$ till bassängkanten vid $(10, 4.5)$ och sedan tillbaka längs samma bana. Hon stiger upp på samma ställe som hon hoppade i. Var ska markeringarna finnas för att hennes simtur ska bli så lång som möjligt?



3B.1: Varpan

I varpaspel kastar man en flat sten och det gäller att träffa en målsticka som är nedsatt i marken tjugo meter bort. Kaströrelsen beskrivs av differentialekvationerna

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k_x \frac{dx}{dt} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -9.81 - k_y \left| \frac{dy}{dt} \right| \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

där varpastenens luftmotståndskonstant i x - resp y -led är $k_x = 0.020$, $k_y = 0.065$. Stenen kastas med hastigheten 19.0 m/s från 1.50 meters höjd.

Varpans nedslagspunkt beror av kastvinkeln α . Ett kast simuleras genom att man anger en kastvinkel och löser differentialekvationerna med Runge-Kuttas metod tills varpan tar mark (t o m hamnar nedanför marknivån $y = 0$). Interpolera fram tidpunkt och x -koordinat för nedslagspunkten.

Problemet att bestämma vilken kastvinkel som ger vinnande varpakast med nedslag inom 1 cm från målstickan utgör ett ekvationslösningsproblem. Skriv en effektiv algoritm som beräknar kastvinkeln och rita upp kastbanan. Tänk på att två lösningar finns till varpaproblemet — en hög och en låg bana.

Diskutera (med hjälp av numeriska experiment) hur de numeriska metoderna och andra eventuella osäkerheter påverkar tillförlitligheten i vinkelresultatet.

Interpolera sedan i de ovan erhållna och lagrade kastbanevärdena (vektorer för t , x , y , $\dot{x}$, $\dot{y}$) för att åstadkomma en tabell där kashöjden skrivs ut för varje meter i x -led. För att beräkna tidpunkten då x antar ett visst värde duger linjär interpolation (om det inte är alltför glest mellan värdena). För beräkning av y vid denna tidpunkt är hermiteinterpolation särskilt lämplig eftersom $\dot{y}$ -värden finns tillgängliga. Rita upp detta resultat också med markering av varpans höjdläge vid varje meter.

Kast i motvind

Om man kastar i hård motvind måste luftmotståndskonstanten i x -led sättas till ett högre värde; samtidigt krävs en högre hastighet vid utkastet för att varpan ska ha möjlighet att nå tjugo meter. Gör egen numerisk simulering av ett eller flera sådana fall och visa bankurvor över vinnande kast i motvind med de data som du valt.

3B.2: Metallröret

Genom ett tjockväggigt cylindriskt metallrör strömmar en het vätska med den konstanta temperaturen 450° C . Cylinderväggen har innerradien 1.0 cm och ytterradien 2.0 cm. Temperaturfördelningen $u(r)$ i metallen bestäms av differentialekvationen

$$r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0 \quad \text{med} \quad u = 450 \quad \text{vid} \quad r = 1 \quad (\text{längdenhet cm}).$$

Omgivande temperatur är 20° C . Vid $r = 2$ är temperaturgradienten du/dr proportionell mot temperaturdifferensen, d v s där gäller $du/dr = -K \cdot (u - 20)$.

K är en materialkonstant, det så kallade värmeöverföringstalet mellan metall och luft. Låt metallen i testfallet ha $K = 1$.

Gör enligt finitadifferensmetoden en diskretisering av intervallet $1 \leq r \leq 2$ indelat i N delintervall. Visa hur randvärdesproblemet kan approximeras av ett matrisproblem. Lös detta först för $N = 25$, fortsatt med successiva fördubblingar av N tills önskad precision erhålls — t ex fyra korrekta siffror i temperaturvärdet vid cylinderns ytterradie. Rita upp temperaturfördelningen i metallen.

Man tillåter inte att metallcylinderns utsida får bli varmare än 100° . Beräkna vilket som är det kritiska K -värdet för metallen för att detta ska uppnås.

Undersök även hur känsligt detta kritiska K -värde är för temperaturvariationer i vätskan. Det inträffar nämligen att vätskan i röret råkar stiga till 460° C i stället för att hålla det givna temperaturvärdet 450° C .

(Problemet kan lösas analytiskt, gör gärna det för kontroll.)

Det visar sig att det tjockväggiga röret är tillverkat av ett inhomogent material — värmediffusiviteten i röret har ett radiellt beroende. Temperaturfördelningen $u(r)$ bestäms nu av

$$r \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(1 + \frac{r D'(r)}{D(r)} \right) \frac{du}{dr} = 0, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

$D(r)$ är ett tredjegradspolynom med derivatan noll vid inner- och ytterradien, alltså vid $r = 1$ och $r = 2$, dessutom gäller $D(2) = 2D(1)$.

Begynnelsevillkor och randvillkor är samma som tidigare. Lös samma uppgifter som ovan.

3B.3: Motordrivna inversa pendeln

Modifierad version av uppgift P8-13 i Kahaner-Moler-Nash.

A famous problem of nonlinear mechanics is known as the inverted pendulum. The pendulum is a stiff bar of length L which is supported at one end by a frictionless pin. The support pin is given a rapid up-and-down motion $s(t) = A \sin \omega t$ by means of an electric motor. An application of Newton's second law of motion yields the equation of motion

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{L} (g - A\omega^2 \sin \omega t) \sin \phi$$

where ϕ is the angular position of the bar ($\phi = 0$ when the bar is directly above the pin) and $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ is the acceleration due to gravity.

For $A = 0$ it is called the pendulum equation $\ddot{\phi} = \frac{g}{L} \sin \phi$. Even this equation is not solvable in terms of elementary functions. But it is known that when $A = 0$ and the pendulum is released from rest, i.e. $\dot{\phi}(0) = 0$, the period T of the pendulum is given by

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} K\left(\frac{\phi(0)}{2}\right) \quad \text{where} \quad K(u) = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos^2 u \sin^2 x}}$$

Use the Runge-Kutta method to compute the motion $\phi(t)$ and to find the period (some interpolation may be needed) when $A = 0$, $L = 0.4$, $\phi(0) = \pi/4$ and $\dot{\phi}(0) = 0$ (this is an ordinary pendulum).

Compare the period computed by your Runge-Kutta program with the value of T above computed by an efficient numerical integration method.

The inverted pendulum

The most interesting aspect of the pendulum problem when $A \neq 0$ is that for some A and ω -values an inverted pendulum stays pointing upwards and this has been observed experimentally. Make computer simulations for a bar of length 400 mm ($L = 0.4$) which is initially released from rest at the angle 5° ($\phi(0) = 5\pi/180$).

Use the RK4-method to compute the motion $\phi(t)$ for different values of amplitude: $A = 0.18, 0.20, 0.22, 0.24$, and a number of ω -values: $\omega = 14, 16, 24, 34, 44, 54$. Let $T_s = 2\pi/\omega$. Try the following time-step: $dt = T_s/m$ with $m = 50$ and $m = 100$ and solve for $0 \leq t \leq 30T_s$. You may also stop when the value of ϕ is less than $-\pi$ or greater than π , why?

Plot ϕ and $\dot{\phi}$ as functions of t , and also $\dot{\phi}$ against ϕ (the phase plane). But the most interesting plot shows the whole stiff bar at every instant (see `rkpendel.m`). Also make a plot that shows the trace of the free end of the bar.

Investigate the exciting behaviour at $A = 0.20$ further for ω -values in the interval $30 < \omega < 55$.

3B.4: Rymdskeppet Futten illa ute

Trots att raketmotorn går för fullt förblir Futten hängande orörlig på höjden H över jordytan. Goda råd är dyra! Kaptenen låter rymdskeppet vrida sig nittio grader från det tidigare vertikala läget, och i fortsättningen verkar raketmotorn horisontellt med oförminskad kraft. Störtar Futten eller klarar sig rymdskeppet ut i rymden?

Newtons rörelseekvationer uttryckta i polära koordinater lyder:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = G \cos \alpha - g \frac{R^2}{r^2}$$

$$r \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} = G \sin \alpha$$

där vinkeln α var noll före vridningen men blir 90° efter kaptenens manöver (vid tiden $t = 0$). R är jordradien, g är tyngdaccelerationen vid jordytan och G är tyngdaccelerationen på höjden H där Futten blev hängande: $G = gR^2/(R + H)^2$.

Med för vårt problem lämpliga enheter — längdenhet jordradie och tidsenhet timme — gäller att $g = 20.0$ jordradier/tim². De nödvändiga startvärdena ges av det faktum att Futten var helt stilla då kaptenen ändrade banriktning.

Skriv ett program som med Runge-Kuttas metod löser differentialekvationerna under så lång tid att det står klart om Futten störtar eller försvinner ut i rymden. Futten befinner sig på några jordradiers höjd då kaptenen gör manövern. Undersök först vad som händer om starthöjden H är två jordradier, pröva sedan hur Futtens bana blir vid några andra val av starthöjder. Experimentera dig fram till lagom sluttid och lämpligt tidssteg. Fundera ut en bra algoritm som med god noggrannhet och lämplig form av interpolation bestämmer tidpunkt och positionsangivelse (t_p , ϕ_p , r_p) för banans allra lägsta punkt.

Uppgiften är nu att med en effektiv algoritm räkna fram gränsfallets H -värde, dvs Futtens starthöjd $H_{\text{gräns}}$ som leder till en bana utan att katastrofen blir ett faktum. Bestäm hastigheten som Futten sveper förbi jordytan med i detta fall. Rita bankurvan från begynnelseläget till platsen där raketen just passerar grantopparna. Beräkna bankurvans längd, alltså Futtens tillryggalagda sträcka. Gör tillförlitlighetsbedömning av de erhållna resultaten!

Bankurvan har parabelliknande form, eller hur? Bestäm och rita upp den parabel som i minstakvadratmetodens mening bäst anpassar sig till Futtens bana. Beräkna parabelbågens längd och jämför med Futtensträckan ovan.

Slutligen, om kaptenen vid sin snabba manöver inte lyckas vrida Futten exakt 90° utan vinkeln α slår fel på t ex fem grader, hur mycket påverkar det raketbanan? Gör körningar med några olika vinklar (gärna både små och stora avvikelser från 90° -manövern) och studera hur det kritiska H -värdet ändras! Rita de olika bankurvorna och gör parabelanpassningen med båg-längdsberäkning här också.

3B.5: Strömkretsen

En enkel strömkrets består av en kondensator och en spole. Kondensatorn är uppladdad till spänningen U_0 . Spolen innehåller järn och har strömberoende induktans: $L = L_0/(1 + I^2)$.

Vid tiden $t = 0$ sluts kretsen och strömmen bestäms sedan av två samband:

$$\text{Spänningen över induktansen:} \quad U = L \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

$$\text{Strömmen genom kondensatorn:} \quad I = -C \frac{dU}{dt} \quad (2)$$

Visa att följande differentialekvation kan härledas ur uttrycken ovan (efter derivering av första uttrycket):

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = \frac{2I}{1 + I^2} \left(\frac{dI}{dt} \right)^2 - \frac{I(1 + I^2)}{L_0 C}$$

Vid tiden $t = 0$ gäller $I = 0$ och $dI/dt = U_0/L_0$. Lösningen $I(t)$ till differentialekvationen är en periodisk funktion som är mer eller mindre sinusliknande beroende av hur U_0 -värdet väljs.

Gällande data är $L_0 = 1$ H, $C = 1 \mu\text{F}$. Några olika värden på U_0 ska prövas, dels spänningen 240 V då järnkärnans inflytande är nästan försumbart, dels två höga spänningsvärden 1200 V och 2400 V då strömkurvan inte blir särskilt sinuslik längre.

Före den numeriska behandlingen kan det vara bra att bedöma storleksordningen på svängningstiden. Det är lätt att räkna ut frekvensen och svängningstiden för en krets med konstant C och konstant $L = L_0$.

Använd `ode45` för att beräkna och rita strömkurvorna (standardtoleransen i `ode45` duger inte, en relativ tolerans som är flera tiopotenser mindre kan vara nödvändig). Som jämförelse ska du även utnyttja en egen RK4 för strömkurveberäkningarna.

Fundera ut en bra algoritm för att bestämma strömmens toppvärde $I_{\max}$ och för att med mycket god precision beräkna svängningstiden T . Tillförlitlighetsbedömning av $I_{\max}$ och T krävs.

Fourieranalys – anpassning med trigonometriskt polynom

Programmet ska göra en fourieranalys av strömkurvan, det vill säga beräkna koefficienterna a_k i fourierutvecklingen av $I(t)$:

$$I(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \dots, \quad \text{där } \omega = 2\pi/T$$

Att det inte blir några cosinustermer i utvecklingen följer av att funktionen $I(t)$ är udda.

För koefficienterna i formeln gäller:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T I(t) \sin k\omega t \, dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Vid valet av numerisk integrationsmetod bör du tänka på att integranden är en periodisk funktion. Beräkna de 14 första fourierkoefficienterna. Om strömmen är nästan sinusformad bör alla koefficienter utom den första vara mycket små, stämmer det? Det symmetriska utseendet hos strömkurvan gör att vissa fourierkoefficienter är noll (teoretiskt i alla fall). Vilka är det och hur väl stämmer teori och praktik?

Rita i samma figur upp strömkurvan samt resultatet av fourierutvecklingen, dels då bara de tre första termerna tas med, dels då alla fjorton finns med.

3B.6: Käggen som knäcks

En svarvad kapp med längden L har cirkulärt tvärsnitt med tvärsnittsradien $r(x)$. Kappens konturkurva, alltså $r(x)$, bestäms av naturliga kubiska splines genom sju givna punkter (x_i, r_i) med $x_1=0$, $x_7=L$ och avståndet $L/6$ mellan x_i -värdena.

Beräkna konturkurvan för en kapp med $L = 1.2$ och $\mathbf{r} = 0.01(2.2 + \text{telefonnr})$, dels för telefonnr = 7 9 0 8 0 7 7 (numret till Nadas studentexpedition) dels för numret 7 9 0 0 9 3 0 (till Nadas telefax). Rita konturkurvan och markera också interpolationspunkterna.

Käggen som har medellinjen längs x -axeln utsätts för en tryckkraft P i axiell led. Vi studerar kappens medellinje som nu kommer att få en utböjningskurva $y(x)$ med $y(0) = 0$ och $y(L) = 0$. Vi vill veta hur stor kraft P som krävs för att käggen ska knäckas. Utböjningen $y(x)$ bestäms av differentialekvationen

$$E I(x) y'' = -P y, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \quad \text{där } I(x) = \frac{\pi}{4} r(x)^4$$

(tröghetsmomentet vid cirkulärt tvärsnitt) och $E = 10^8$ (materialkonstant).

Börja med att diskretisera käggen i $N = 30$ delintervall (dvs med vart och ett av de sex interpolationsintervallen delat i fem delar) för att omforma problemet till ett matrisproblem på formen $\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, där uttrycket för λ innehåller kraften P och materialkonstanten E .

En trivial lösning till detta problem är $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ (det vill säga ingen utböjning alls). För vissa värden på P finns det icke-triviala lösningar och det är då som käggen riskerar att knäckas. Det är det minsta av dessa P -värden som är mest intressant, vilket innebär att det till beloppet minsta egenvärdet λ till $\mathbf{A}$ måste beräknas. När det är känt kan knäckkraften P bestämmas ur sambandet $P = -\lambda E/(\delta x)^2$ där $\delta x = L/30$ om käggen diskretiserats i 30 intervall. Härled sambandet!

Matlabfunktionen `eig(A)` beräknar alla egenvärden; gör `sort(eig(A))` för att ordna dem. Det är enbart ett av dessa egenvärden som är av intresse här!

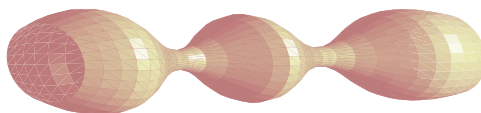
Det finns en numerisk metod, *inversa potensmetoden*, som iterativt bestämmer det till beloppet minsta egenvärdet till en matris $\mathbf{A}$. Algoritmen lyder:

Starta med en kolumnvektor $\mathbf{x}$ med alla komponenter lika med ett. Upprepa följande satser: Bilda $\mathbf{u} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$; lös systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}$ med hjälp av `tridia`; bild $q = \mathbf{u}^\top \mathbf{x}$; avbryt när två på varandra följande q -värden överensstämmer med förslagsvis fem siffror. Då gäller $\lambda = 1/q$. Kontrollera att resultatet från denna metod överensstämmer med `eig(A)`-värdet.

För att knäckkraften ska erhållas med god noggrannhet behövs en finare diskretisering. Förutom för $N = 30$ ska P -beräkningen utföras för $N = 60, 120, 240$. Gör en noggrannhetsbedömning av knäckkraftsvärdet.

En jämntjock kapp med samma P -värde som gäller för vår knöliga kapp har en konstant radie på $\sqrt[4]{4PL^2/E\pi^3}$. Rita in den!

Utför konturberäkningar och knäckkraftsberäkningar för båda testfallen. Rita 2D-konturkurvan och den tredimensionella käggen. Ta sedan ett eget telefonnummer som data och utför beräkningarna ovan.



3B.7: Partikeln i fältet

Laddade partiklar rör sig med hög hastighet in i ett område där det finns två elektromagnetiska kraftfält. Vid passagen inuti de båda kraftfälten kröks partikelbanorna. Utanför kraftfälten är banorna rätlinjiga.

Fälten finns inom två cirkulära cylindrar båda med radien R och med axlarna parallella med z -axeln, mittpunkter vid $x = a_1$, $y = b_1$ respektive $x = a_2$, $y = b_2$. Det elektriska fältet i cylindrarna är $\mathbf{E} = E(1, 0, 0)$ respektive $\mathbf{E} = E(-1, 0, 0)$ med konstant fältstyrka E . Det magnetiska fältet är riktat i z -led och är starkast i mitten. I första cylindern gäller $\mathbf{B} = B(0, 0, 1 - w \frac{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}}{R})$ och i den andra: $\mathbf{B} = B(0, 0, -(1 - w \frac{\sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2}}{R}))$. w är en viktfaktor med ett värde mellan 0 och 0.5.

Om partikelns position vid tiden t beskrivs med vektorn $\mathbf{r}(t)$ så gäller följande differentialekvation för partikelrörelsen: $m\ddot{\mathbf{r}} = Q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$, där m är partikelns massa och Q dess laddning.

Betrakta först rörelsen för en partikel. Den har hastigheten v_0 när den kommer farande längs negativa x -axeln i positiv riktning. Vi börjar studera rörelsen när den passerar origo. Om partikelns hastighetskomponent i z -led är noll utanför fälten så förblir den noll inuti de ovan beskrivna fälten; partikelbanan blir plan och kan beskrivas med enbart x - och y -koordinater. I detta fall erhålls differentialekvationerna

$$\ddot{x} = \frac{Q}{m} \left(E + \left(1 - w \frac{r_1}{R} \right) B \dot{y} \right), \quad \ddot{y} = -\frac{Q}{m} \left(1 - w \frac{r_1}{R} \right) B \dot{x}, \quad \text{där}$$

$$r_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2},$$

om partikeln befinner sig i första kraftfältet. Härled dessa uttryck ur kryssproduktformeln ovan. På motsvarande sätt erhålls uttrycken inom andra kraftfältet. Utanför cirkelarna (som cylindrarna nu reducerats till) gäller $m\ddot{\mathbf{r}} = 0$, dvs partikelrörelsen blir rätlinjig.

Vår studie gäller elektroner med massan $m = 9.1091 \cdot 10^{-31}$ kg och negativ laddning $Q = -1.6021 \cdot 10^{-19}$ C. Hastigheten är $v_0 = 455 \cdot 10^3$ m/s. Övriga data: $E = 20.0$ V/m, $B = 0.92 \cdot 10^{-4}$ Wb/m², $R = 0.012$ m, $a_1 = 0.015$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0.030$, $b_2 = 0.034$. Viktfaktor $w = 0.2$.

Beräkna elektronens bana från $x = 0$ tills den med god marginal lämnat den andra cylinderns kraftfält. Utnyttja kunskapen om rätlinjig rörelse utanför kraftfälten (med ekvationslösning för skärning mellan rät linje och cirkel). Använd RK4 för lösning av ode-systemet inuti kraftfälten och utför lämplig interpolation för att erhålla elektronens position precis vid utgången av varje fält. Prova dig fram till lagom tidssteg som ger acceptabel noggrannhet och motivera det valda steget!

Låt nu tre elektroner alla med hastigheten v_0 i x -riktningen komma in i parallella banor; startpositioner vid $t = 0$ är $x = 0$ och $y = -0.002, 0, 0.002$. Beräkna och rita de tre elektronbanorna med samma viktfaktor $w = 0.2$ som ovan. Efter passagen genom kraftfälten är banorna inte parallella längre. Genom att förflytta det andra fältet i y -led (alltså ändra b_2 -värdet) kan man åstadkomma att banorna för elektron nr 1 och 3 blir parallella igen. Använd någon effektiv algoritm för att bestämma cylinderplaceringen.

Magnetfältets styrka beror av viktfaktorn w . Man vill studera hur en ändring av w -värdet påverkar slutriktningen för de parallella elektronbanorna. Utför beräkningarna för $w = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

3B.8: Pilbågen

Busiga Bertil upptäcker att skolsalens enmeterslinjal är så böjlig att den borde duga till pilbåge. Han spänner ett snöre mellan linjaländarna — det råkar finnas små hål just vid nollstrecket och vid enmetersmarkeringen — och drar åt snöret så att bågen buktar 30 cm vid mittpunkten.

Uppgiften är att bestämma formen på pilbågen. Den blir symmetrisk kring mittpunkten så det räcker att behandla högra halvan av intervallet $-a \leq x \leq a$. För utböjningen $y(x)$ gäller följande differentialekvation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + qy \cdot \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} = 0$$

där storheten q beror av linjalens materialegenskaper som elasticitetsmodul och tröghetsmoment.

Randvillkoren är: $y(0) = 0.3$, $y'(0) = 0$, $y(a) = 0$. Dessutom finns villkoret att pilbågens längd är exakt en halv meter från $x = 0$ till $x = a$.

Det blir fråga om ett ickelinjärt randvärdesproblem med två okända konstanter a och q , ganska komplicerat! Goda startvärden behövs för att de iterativt ska kunna bestämmas.

Börja därför med att lösa det förenklade problemet då y' -termen försummas, för att sedan kunna utnyttja resultatet som startgissning till det ickelinjära problemet. Förenklingen ger differentialekvationen $y'' + qy = 0$ med randvillkoren ovan. Visa att lösningen kan skrivas $y(x) = 0.3 \cos \sqrt{q}x$ och ange sambandet mellan a och q .

Värdet på a bestäms ur villkoret om pilbågens längd. Det blir ett kombinerat integral- och ekvationslösningsproblem där båglängdsintegralen $\int \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ ingår. Då a är bestämd känner vi också q , och därmed hela pilbågsformen $y(x)$.

Nu kan den ursprungliga differentialekvationen betraktas igen. För ett givet värde på q innebär de två villkoren vid $x = 0$ att vi har ett begynnelsevärdesproblem att lösa, och a -värdet erhålls vid kurvans skärningspunkt med x -axeln. Bestäm denna punkt med stor noggrannhet. Kontrollera därefter hur väl båglängdsvillkoret är uppfyllt. Prova ett nytt q -värde och automatisera sökandet till en effektiv algoritm för att lösa ekvationen $\text{båglängd}(q, a(q)) = 0.5$, så att pilbågens rätta form erhålls.

Rita upp pilbågen och designa slutligen en kubisk bézierkurva som överensstämmer så bra som möjligt med halva pilbågen och har en båglängd på en halv meter.

3B.9: Strömning intill en vägg

Mälaren står ju i förbindelse med Östersjön via Stockholms ström. De mänskliga fiskarna i Mälaren vill gärna att de djuriska fiskarna i Östersjön ska ta sej upp genom strömmen, men torsk och strömming nobbar denna omvända forsränning.

STRÖMMINGSSKÖTARNA heter den fiskvårdsförening som föreslagit en anordning för att underlätta uppfarten och som kallat dig att utreda förslaget numeriskt. Mitt i strömfåran ska en femton meter lång vertikal vägg sträcka sig från botten till ytan. Friktionen gör att vattnets hastighet minskar närmast väggen, och där skulle alltså strömmingen kunna tas sig fram motströms. Det gäller för dig att beräkna hur vattenströmningen kommer att förändras av väggen och vilken kraft väggen kommer att utsättas för. En snabbkurs i hydrodynamik följer!

Låt väggen ligga längs x -axeln från origo till $x_{vagg} = 15$. Låt $u(x, y)$ och $v(x, y)$ vara vattnets hastighetskomponenter i x -led respektive y -led. För $x < 0$ och för stora y råder ännu det ursprungliga tillståndet $v = 0$, $u = u_\infty = 1$ m/s, men ju närmare väggen man kommer, desto lägre blir hastigheten. En tänkbar fysikalisk modell är *blasiusströmning*, som ges av två partiella differentialekvationer

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 .$$

Här är $\nu = 0.001$ m²/s den kinematiska viskositeten för geggigt vatten. Blasius införde variabeln $\eta = y\sqrt{u_\infty/\nu x}$ i stället för y och kunde sedan skriva lösningen som

$$u = u_\infty f'(\eta) , \quad v = \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{4x}} (\eta f' - f) ,$$

där f satisfierar följande ordinära differentialekvation med randvillkor

$$f f'' + 2f''' = 0 , \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 .$$

Lös ekvationen med inskjutningsmetoden! Gör approximationen $\infty \approx 10$ (motivera vettigheten i detta).

En strömming simmar alltid rakt motströms, d v s längs en så kallad *strömningslinje* som bestäms av differentialekvationerna $dx/dt = -u(x, y)$, $dy/dt = -v(x, y)$. Rita upp strömningslinjerna för fyra strömmingar som kommer in 10, 15, 20 resp 25 cm från väggen, alltså i punkterna $(x_{vagg}, 0.10)$, $(x_{vagg}, 0.15)$ osv. Viss interpolation blir nödvändig för högerledsberäkningen vid lösningen av differentialekvationerna. Genom att studera hastighetens belopp på strömmingens väg kan man avgöra hur pass mycket väggen underlättat fiskens uppfart.

Den kraft väggen utsätts för motsvaras av vattnets hastighetsminskning eller mera korrekt rörelsemängdsminskningen per tidsenhet. Låt $H = 4$ vara vägghöjden. Genom tvärsnittsarean $H dy$ strömmar varje tidsenhet massan $\rho u H dy$ och dess hastighetsminskning jämfört med urtillståndet är $u_\infty - u$, vilket ger uttrycket för kraften

$$F = 2\rho H \int_0^\infty u(u_\infty - u) dy = 2\rho H \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \int_0^\infty u(u_\infty - u) d\eta .$$

Insättning av $x = x_{vagg} = 15$ m och $\rho = 1000$ kg/m³ ger totala kraften i newton. Beräkna den!

3B.12: Ljudvågor under vattnet

Modifierad version av uppgift P8-15 i Kahaner-Moler-Nash.

The speed of sound in ocean water depends on pressure, temperature and salinity, all of which vary with depth in fairly complicated ways. Let z denote depth in feet under the ocean surface (so that the positive z axis points down) and let $c(z)$ denote the speed of sound at depth z . We shall ignore the changes in sound speed observed in horizontal directions. It is possible to measure $c(z)$ at discrete values of z ; typical results can be found in the table. We need $c(z)$ and also $c'(z)$ between data points. Fit the data in a least-squares sense with the non-linear model function

$$c(z) = 4800 + p_1 + p_2 \frac{z}{1000} + p_3 e^{-p_4 z/1000}$$

To obtain startguesses, solve the linear approximation problem with $p_4 = 1$. Make a plot over the data points and the received model curve $c(z)$.

Since the sound speed varies with depth, sound rays will travel in curved paths. A fixed underwater point emits rays in all directions. Given a particular point and initial direction we would like to follow the ray path. Thus letting x be the horizontal coordinate we know the initial values: $x = 0$, $z = z_0$, $dz/dx = \tan \beta_0$, where β_0 denotes the angle between the horizontal line $z = z_0$ and the ray in the start point.

The ray path $z(x)$ is described by the following second order differential equation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -q_0 \frac{c'(z)}{c(z)^3}$$

where $q_0 = (c(z_0)/\cos \beta_0)^2$. Use the Runge-Kutta method (or `ode45`) to trace the ray beginning at $z_0 = 2000$ feet and $\beta_0 = 7.8$ degrees. Follow the ray for 25 nautical miles (1 nautical mile is 6076 feet). Plot the curve $z(x)$. You should find that the depth at $x_f = 25$ nautical miles is close to 2500 feet.

Now suppose that a sound source at a depth of 2000 feet transmits to a receiver 25 miles away at a depth of 2500 feet. The above calculation shows that one of the rays from the source to the receiver leaves the source at an angle close to 7.8 degrees. Because of the nonlinearity of the equation there may be other rays leaving at different angles that reach the same receiver. Run your program for β_0 in the range from -10 up to 14 degrees, plot the ray paths and print a table of the values $z(x_f)$.

We are interested in finding values of β_0 for which $z(x_f) = 2500$. Use an efficient algorithm to determine the rays which pass through the receiver. Discuss the accuracy of your results.

z	$c(z)$
0	5050
500	4980
1000	4930
1500	4890
2000	4870
2500	4865
3000	4860
3500	4860
4000	4865
5000	4875
6000	4885
7000	4905
8000	4920
9000	4935
10000	4950
11000	4970
12000	4990

3B.13: Vindkastet

En aprildag med varma sydvindar tränar Pelle bollkast på sportplanen. Han kastar i väg bollen österut med utkastvinkeln (i vertikalplanet) 30° , hastigheten 25 m/s och höjden 1.4 m. Pelle har fötterna i origo i ett koordinatsystem med horisontella x - och y -axlar, x åt öster, y åt norr (i vindens riktning). Differentialekvationerna för bollbanan blir

$$\ddot{x} = -q \dot{x}, \quad \ddot{y} = -q (\dot{y} - a(z)), \quad \ddot{z} = -9.81 - q |\dot{z}|, \quad \text{där } q = c \sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - a(z))^2 + \dot{z}^2}.$$

Luftmotståndskoefficienten c beror av bollradien och massan och är för Pelles boll $c = 0.070$. Vindstyrkan är 7 m/s vid marken och ökar den här aprildagen med höjden enligt: $a(z) = 7 + 0.35z$.

Visa hur differentialekvationerna kan skrivas om på vektorform till ett system av första ordningens differentialekvationer och ange startvektorns komponenter.

Använd en effektiv algoritm som bestämmer kastbanan tills bollen nått mark och beräknar nedslagsplatsen noggrant – någon form av interpolation kan behövas eftersom räkningarna inte ska utföras med ett onödigt kort tidssteg. Bedöm noggrannheten i resultatet.

Rita kastbanan — plotkommandot för att rita en kurva i 3D är `plot3(x,y,z)` där $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ är vektorer som innehåller kurvpunkternas koordinater.

Pelle vill att bollen trots vinden ska slå ned rakt österut, alltså på x -axeln. Hur ska han vända sig i kastögonblicket för att åstadkomma det? Hans utkastvinkel i vertikalplanet är fortfarande 30° . Utvidga programmet med en effektiv algoritm för detta.

Pelles boll studsar faktiskt när den slår ner på marken. Bollens hastighetskomponenter blir vid studsens samma i x - och y -led som de var just vid nedslaget, medan hastigheten i z -led byter tecken.

Lägg på en lagom dämpning, till exempel en dämpningsfaktor på 0.80 vid varje studs. Visa en bild över bankurvan för den studsande bollens fem första studsar, när Pelle kastar i väg bollen så att första nedslaget hamnar på x -axeln.

3B.15: Glödtråden

Betrakta randvärdesproblemet

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \sigma u^4 - I^2 R(u), \quad u(0) = 10, \quad u'(L/2) = 0.$$

Problemet är att finna temperaturfördelningen $u(x)$ i en strömförande metalltråd med längden $L = 0.40$ m, då trådändarna hålls vid den mycket låga temperaturen 10 K. På grund av symmetrin räcker det att betrakta halva trådens längd med randvillkoren ovan.

Resistiviteten i tråden är temperaturberoende: $R(u) = 2 + 0.05 u \ln u$. Strålningskonstanten är $\sigma = 10^{-7}$. Man vill först lösa problemet då strömmen I är fem ampere.

Använd finitadifferensmetoden och gör diskretisering i N intervall. Visa hur randvärdesproblemet kan approximeras av ett ickeinjärt ekvationssystem. Lös systemet dels för $N = 40$ dels för $N = 80$. Försätt att fördubbla om du tycker att noggrannheten är otillräcklig. Rita upp temperaturfördelningen i tråden.

Vi vill också finna temperaturfördelningen i tråden då strömstyrkan är betydligt högre, ända upp till 50 A. När strömmen är så stark blir tråden glödhet på mitten men är fortfarande ytterst kall i ändarna. Det kan vara knepigt att hitta fungerande startgissningar.

Fundera ut en lämplig algoritm som successivt löser mellanliggande temperaturfördelningsproblem — först för strömstyrkor strax över 5 A och därefter lagom strömhöjning. Algoritmen bör därmed klara av att beräkna de knepiga temperaturfördelningskurvorna som höga strömstyrkor ger upphov till.

En annan tänkbar algoritm för randvärdesproblem är inskjutningsmetoden. Gör nu en jämförande studie genom att också pröva denna metod på glödtrådsproblemet först vid den låga strömstyrkan 5 A, därefter vid allt högre strömstyrkor.

3B.16: Satelliten

En satellit rör sig i ett kretslopp kring jorden och månen. De tre kropparna bildar ett plan i rymden och vi lägger ett koordinatsystem i detta rörliga plan: x -axeln är linjen som går genom jorden och månen; origo läggs i dessa kroppars masscentrum, och längdenheten väljs så att avståndet jorden–månen är en enhet.

$\mu = 1/82.45$ är förhållandet mellan månens och jordens massor; jordens centrum finns i $(-\mu, 0)$ och månens centrum i $(1-\mu, 0)$. Satellitens massa är försumbar jämfört med de båda andra kropparna och dess läge som funktion av tiden är $(x(t), y(t))$ i detta koordinatsystem, som ju rör sig allt eftersom månen roterar kring jorden.

Differentialekvationssystemet nedan beskriver satellitens rörelse. Parametervärdet $c = 0$ är naturligtast, ett c -värde skilt från noll innebär att man simulerar viss friktion i rymden.

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{\lambda(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - \lambda)}{r_2^3} - c\dot{x}, \quad \ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{\lambda y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} - c\dot{y}$$

där $\lambda = 1 - \mu$, $r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - \lambda)^2 + y^2$.

Vid tidpunkten $t = 0$ befinner sig satelliten i punkten $(1.2, 0)$ och har hastigheten v_0 i negativ y -riktning, dvs $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -v_0$.

För att få differentialekvationernas enkla utseende gäller att tidsenheten och längdenheten är listigt valda. Tiden har skalats så att en tidsenhet är $3.751 \cdot 10^5$ sekunder. Längdenheten är som ovan sagts avståndet mellan jordens och månens centrum vilket är $3.84 \cdot 10^5$ km. Jordradien är 6370 km.

Behandla fallet $c = 0$. Vi är intresserade av att hitta en periodisk lösning till satellitbanan, så att satelliten efter tiden T återkommer till sitt läge vid $t = 0$ med samma hastighetsvektor som då. Man vet att det finns en sådan bana för ett v_0 -värde som ligger strax över 1 och att omloppstiden T blir drygt sex tidsenheter. Använd denna kunskap för att bestämma v_0 och T med tresiffrig precision.

Börja med att beräkna banan för $v_0 = 1$: Lös differentialekvationerna med `ode45` fram till en tidpunkt som med god marginal ligger under omloppstiden och rita upp banan. Fortsätt därefter med Runge-Kuttas metod fram till dess att satelliten just korsat x -axeln. Beräkna (med lämplig form av interpolation) t -värdet och $\dot{x}$ -värdet vid x -axelpassagen. Notera hur mycket den beräknade hastigheten i x -led avviker från det önskade nollvärdet. Rita hela banan. Satellitbanan har ett rätt intressant utseende i detta koordinatsystem.

Gör om beräkningarna för $v_0 = 1.1$, och automatisera därefter sökandet till en effektiv ekvationslösningsalgoritm för att finna den starthastighet v_0 som åstadkommer att $\dot{x} = 0$ efter ett helt varv. Vad blir omloppstiden omräknat i dygn? Diskutera tillförlitligheten i resultatet.

Hur nära jordytan passerar satelliten? Ange avståndet i km och tidpunkten i dygn vid de två tillfällen under banan då satelliten är som närmast.

Genomför hela simuleringen en gång till men med satelliten i punkten $(1.21, 0)$ vid $t = 0$. Hur nära jordytan sveper satelliten?

När man i en simulering råkar sätta v_0 till 1.5 visade det sig att hela förfarandet konvergerar mot en annan periodisk satellitbana. Hur ser den ut? Vilken omloppstid och minsta avstånd till jordytan?

Inför nu friktion, låt $c = 1$ och lös differentialekvationerna med samma begynnelsevärden som i det första periodiska fallet ovan. Vad tycks ske med satelliten?

3B.17: Struthatten

Stjärngossestrut och kräfthatt — två utvecklingsbara ytor

En trevlig struthatt får man av en sned kon med spetsen i punkten $(a, 0, b)$ och med cirkelformad bas, $x = R \cos u$, $y = R \sin u$, $z = 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

Med $R = 7.8$, $a = 5.5$ och $b = 11$ blir hatten lagom stor för kräftskivan. Med värdena $R = 8.8$, $a = 12$ och $b = 36$ får vi en stjärngossestrut.

Koner har den goda egenskapen att de kan åstadkommas genom rullning av plant material som t ex papper eller plåt. En rymdyta av detta slag kallas *utvecklingsbar* (med ett finare ord *developabel*) och har stor betydelse i tillverkningsindustrin. Det gäller att kunna räkna fram konturen till rymdytans plana mall.

Med hjälp av differentialgeometri och egenskaper hos rymdytan (i vårt fall den sneda konen) kan man härleda följande tre differentialekvationer som beskriver klipparkets buktiga mönsterkurva:

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{R - a \cos u}{\sqrt{b^2 + (R - a \cos u)^2}}$$

$$\frac{d\xi}{du} = R \cos \alpha, \quad \frac{d\eta}{du} = R \sin \alpha$$

där ξ och η är kurvans x - och y -värden då parametern u löper från 0 till 2π , och α är lutningsvinkeln för kurvan i punkten (ξ, η) .

Startvärden i punkten A: $u = 0$, $\alpha = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$. Kurvan slutar i punkten B där parametern u har nått 2π .

Lös differentialekvationssystemet med Runge-Kuttas metod och rita kurvan från A till B. Fyrtio steg kan vara lämpligt för att få snygg kontur. Konens spets kommer på klipparket att vara belägen i punkten $P = \left(0, \sqrt{b^2 + (R - a)^2}\right)$, motivera det!

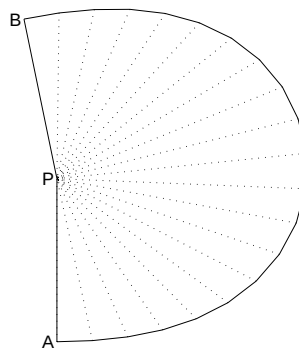
Om man nöjer sig med bara åtta eller tio delintervall i RK4 får man faktiskt tillräcklig noggrannhet (cirka fyra korrekta siffror) i de beräknade värdena på α , ξ och η (kolla det experimentellt!), men kruxet är då att få kurvan att bukta snyggt mellan punkterna. Interpolation med kvadratisk Bézierkurva i varje intervall ger prydlig lösning. Styrpunktens läge bestäms helt av ξ , η och α i de båda interpolationspunkterna. Redovisa en härledning av styrpunktskoordinaterna.

Beräkna och tillverka kräfthatten och stjärngossestruten. Visa i liten skala och kanske också i naturlig storlek!

Om slutvinkeln $\alpha(2\pi)$ i mallen är π eller $\pi/2$ blir tillskärningen av strutmallarna enklare och det blir mindre materialspill. Låt $R = 7.8$ och $a = 5.5$ och beräkna vilken höjd b som kräfthatten kommer att få vid tillverkningskravet $\alpha(2\pi) = \pi$. För lussestruten: behåll $R = 8.8$, $a = 12$ och beräkna höjden b så att $\alpha(2\pi) = \pi/2$.

Bestäm måtten hos det minsta rektangulära klippark som innehåller strutmallen för denna kräfthatt respektive lussestrut. Beräkna med numerisk integration hur stort materialspillet blir. Ange också hur många procent av arket som är spill.

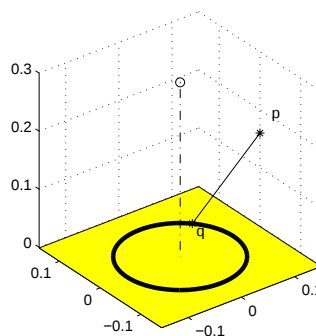
Visa mallar och strutar!



3B.18: Teslatrasslet — snurrig bana i magnetfält

Genom en ring med radien a går strömmen I_0 . Ringen är placerad i planet $z = 0$ med centrum i origo. Strömmen ger upphov till ett magnetfält. Låt $\mathbf{q}$ vara en punkt på ringen, $\mathbf{q} = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, 0)$. I punkten $\mathbf{p} = (r, 0, z)$ bestäms det magnetiska fältet enligt Biot-Savarts lag av

$$\mathbf{B}(r, 0, z) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}(\varphi) \times \mathbf{s}(\varphi)}{s^3} a d\varphi$$



μ_r är permeabilitetstalet för ledaren och $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (i SI-enheter).

$\mathbf{i}(\varphi) = I_0(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$, $\mathbf{s}(\varphi) = \mathbf{p} - \mathbf{q} = (r - a \cos \varphi, -a \sin \varphi, z)$ och s är avståndet $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_2 = \sqrt{(r - a \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi + z^2}$.

Visa att fältkomponenterna blir

$$B_x = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z \cos \varphi}{s^3} d\varphi, \quad B_y = 0, \quad B_z = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a - r \cos \varphi}{s^3} d\varphi$$

där konstanten $C = \mu_r I_0 a \cdot 10^{-7}$ med I_0 i ampere och a i meter. Enheten för magnetisk flödestäthet är *tesla*. Magnetfältet har som synes endast komponenter i radiell led och i z -led. Av symmetriskäl gäller detta för alla vertikala plan genom origo. Komponentbeteckningen B_x (i planet $y = 0$) ersätter vi därför med B_r som betecknar radiell fältkomponent.

Fältlinjeberäkning: I varje vertikalplan genom origo (rz -plan) beskrivs de magnetiska fältlinjerna i parameterform, $(r(v), z(v))$, av differentialekvationssystemet

$$dr/dv = B_r(r, z), \quad dz/dv = B_z(r, z), \quad r(0) = r_0, \quad z(0) = 0.$$

Använd RK4 eller ode45 för den numeriska behandlingen. Utnyttja vid beräkning av B_r och B_z att integranderna är periodiska funktioner. Fältlinjerna bildar slutna ovala kurvor; rita kurvor för $r_0 = 0.2a, 0.3a, 0.4a, 0.5a$.

Data: $a = 0.1$, $I_0 = 2.0$, $\mu_r = 40000$.

Beräkning av partikelbanor: En laddad partikel, laddning Q , massa m , påverkas av det magnetiska fältet från den strömförande ringen. Partikelbanan är tidsberoende, $\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, och beskrivs av differentialekvationen $m \ddot{\mathbf{s}} = Q(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B})$. Magnetfältet har i punkten (x, y, z) komponenterna $B_x = \frac{x}{r} B_r$, $B_y = \frac{y}{r} B_r$, B_z , där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Inför $c_p = Q/m$. Härled följande rörelseekvationer för en partikel med given startposition, riktning och hastighet:

$$\ddot{x} = c_p(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), \quad \ddot{y} = c_p(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z), \quad \ddot{z} = c_p(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x).$$

Skriv om till ett system av första ordningens ODE och utnyttja ode45 för att beräkna och rita banan för en partikel med laddning/massa-förhållandet $2 \cdot 10^7$ (As/kg). Experimentera med olika kombinationer av begynnelsepositioner och starthastighet. För testfallets partikel gäller

$$x(0) = 1.2a, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.15a, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \quad \dot{z}(0) = 0$$

med $v_0 = 200000$ m/s. Hur mycket varierar hastigheten under den trassliga färden?

3B.19: Dubbelpendeln

En viktlös stång med längden L_1 är med ena änden friktionsfritt fäst i origo och har en kula med massan m_1 i sin andra ände. En stång med längden L_2 är friktionsfritt upphängd i m_1 -kulan och har en kula med massa m_2 ytterst. Tillsammans utgör systemet en dubbelpendel som kan komma i rejäl svängning.

Låt φ_1 och φ_2 utgöra stängernas vinklar med lodlinjen. Då bestäms pendlarnas rörelse av följande differentialekvationer:

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)L_1\ddot{\varphi}_1 + m_2L_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2L_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + g(m_1+m_2)\sin\varphi_1 &= 0 \\ m_2L_2\ddot{\varphi}_2 + m_2L_1\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1-\varphi_2) - m_2L_1\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1-\varphi_2) + gm_2\sin\varphi_2 &= 0\end{aligned}$$

där g är tyngdaccelerationen, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Dividera med m_2 och inför $q = m_1/m_2$ samt $c_{12} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ och $s_{12} = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$. Systemet blir nu:

$$\begin{aligned}(1+q)L_1\ddot{\varphi}_1 + L_2c_{12}\ddot{\varphi}_2 &= -L_2\dot{\varphi}_2^2s_{12} - g(1+q)\sin\varphi_1 \\ L_1c_{12}\ddot{\varphi}_1 + L_2\ddot{\varphi}_2 &= L_1\dot{\varphi}_1^2s_{12} - g\sin\varphi_2\end{aligned}$$

För att kunna lösa differentialekvationerna numeriskt behöver vi först ha dem på formen $\ddot{\varphi}_1 = f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$ och $\ddot{\varphi}_2 = f_2(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$. Lös därför 2×2 -systemet för hand så att önskade uttryck för $\ddot{\varphi}_1$ och $\ddot{\varphi}_2$ erhålls.

Överför därefter differentialekvationerna till ett system av första ordningens ODE så att RK4 eller ode45 kan utnyttjas för att numeriskt erhålla lösningskurvor $\varphi_1(t)$ och $\varphi_2(t)$.

Studie 1: $L_1 = 0.6$, $L_2 = 1.2$, $m_2 = 2m_1$. Låt dubbelpendeln vid tiden $t = 0$ ha startvinklarna 60° och 45° , dvs $\varphi_1 = \pi/3$ och $\varphi_2 = \pi/4$, och då släppas från stillastående. Beräkna och rita upp $\varphi_1(t)$ och $\varphi_2(t)$ tills fem sekunder gått. Bestäm också dubbelpendelns x - och y -koordinater vid varje tidssteg och visa pendelförloppet (se rkpendel.m).

Studie 2: $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $m_2 = m_1$. Pendeln släpps från stillastående med startvinklarna 90° och 60° . Lösningskurvorna $\varphi_1(t)$ och $\varphi_2(t)$ är inte periodiska men heller inte så långt ifrån. Det bör vara möjligt att finna startvinklar sådana att dubbelpendeln får ett periodiskt förlopp. Formulera en algoritm för effektiv lösning av detta problem och visa pendelrörelsen under några perioder.

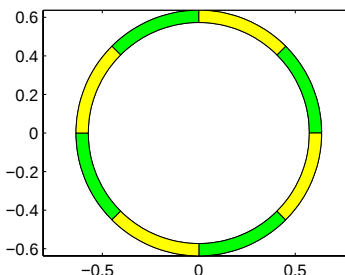
3B.20: Färgränder — utspridd färg i randigt medium

En färgklump råkar falla ned i en kanal där vatten strömmar genom skikt av olika porösa material. Kanalen sträcker sig från $x = 0$ till $x = L$. Färgklumpen spills vid $x = L/2$ och orsakar direkt en koncentrationsfördelning $u_0(x) = e^{-12(x-L/2)^2}$. Mängden spilld färg är $M_0 = \int_0^L u_0(x) dx$.

Med tiden rör sig färgfläcken och sprids ut i hela kanalen. Så småningom uppnås ett "randigt" jämviktstillstånd för färgkoncentrationen $u(x)$ i kanalen. då $u(x)$ bestäms av en andra ordningens differentialekvation.

Mediet i kanalen (ringformad i figuren) består av återkommande skikt av två porösa kompositmaterial med olika materialegenskaper (densitet, etc).

För diffusiviteten (dvs spridningsbenägenheten för färgen) gäller att medelvärdet är $D_0 = 0.005$ och $D(x)$ överstiger D_0 i de mörka kompositskikten och ligger under D_0 i de ljusa. För enkelhets skull antar vi $D(x) = D_0(1 + 0.5 \sin 2\pi x)$. där skikten är en halv



(x löper utmed kanalen, dvs längs cirkelbågen i detta fall).

Strömningshastigheten $a(x)$ för färgen i mediet uppfyller $a(x) = 0.06$ i de mörka skikten och $a(x) = 0.02$ i de ljusa. Vid skiktgränserna (diskontinuitetspunkterna $x = 0, 0.5, 1, 1.5, \dots, L$) får hastigheten anta medelvärdet $a(x) = 0.04$.

Differentialekvationen för färgkoncentrationen i jämviktstillståndet lyder:

$$D(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + D'(x) \frac{du}{dx} - \frac{d}{dx} (a(x)u) = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Randvillkoren för färgkoncentrationen i en sluten kanal är av kontinuitetsskal: $u(0) = u(L)$ och $\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(L)$.

Låt undersökningen gälla en kanal med $L = 4$. Använd finitadifferensmetoden med steget $h = L/80$ för att bestämma koncentrationsfördelningen vid jämvikt. Det blir ett matrisproblem på formen $\mathbf{A} \mathbf{u} = 0$ med singular systemmatris. För att få den önskade entydiga lösningen måste villkoret $\int_0^L u(x) dx = M_0$ utnyttjas på lämpligt vis.

Rita upp den cirkulära kanalen och kurvan som visar koncentrationsfördelningen av den utspridda färgen i kanalen. Skriv ut max- och min-värdena. Hur pålitligt är resultatet? Räkna om med halverat steg, eventuellt flera gånger.

3B.21: Kometens stoftsvans

En komet rör sig i en elliptisk bana runt solen. I polära koordinater med solen i origo gäller uttrycket: $r(\phi) = R/(1 + E \cos \phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

R är ellipsens medelradie och E är excentriciteten som uppfyller $0 \leq E < 1$.

För en cirkel gäller $E = 0$; en mycket långsmal ellips har ett E -värde nära ett.

Vår kometbana har excentriciteten $E = 0.4$ och medelradien $R = 105$ i en lämplig astronomisk längdskala. Kortaste avståndet från solen till kometen är $105/1.4 = 75$ längdenheter. Rita upp ellipsen.

Kometen betraktas vid positionen då den är närmast solen och precis korsar positiva x -axeln, alltså vid $(75, 0)$. Man kan då observera två kometsvansar: en jonsvans riktad rakt ut från solen (den ska vi inte räkna på) och en stoftsvans som består av stoftpartiklar (kometdamm) som kastats ut från kometen. Partiklarna följer inte kometbanan eftersom de förutom av gravitationen från solen också påverkas av strålningstrycket från solljuset.

Halliday, Resnick, Walker, *Fundamentals of Physics*, Sample Problem 34-2 (s813 i sjätte upplagan) visar en fin illustration på kometsvansfenomenet och innehåller lite teori om strålningstryck.

För att kunna beräkna stoftsvansen måste vi känna till kometens position och hastighet vid ett antal tidpunkter före observationspunkten. Newtons gravitationslag ger differentialekvationerna

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -C \frac{x}{s^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -C \frac{y}{s^3} \quad \text{där } s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Konstanten C beror av kometens massa, solens massa och gravitationskonstanten och med väl valda enheter kan vi sätta $C = 1$. Vi vill nyttja kometdata från positionen P där $\phi_0 = 2\pi/3$ medurs till observationspunkten. Riktningen vid P är $\mathbf{k} = (r'(\phi_0) \cos \phi_0 - r(\phi_0) \sin \phi_0, r'(\phi_0) \sin \phi_0 + r(\phi_0) \cos \phi_0)$ (visa det).

Den normerade rörelseriktningen är $\mathbf{k}_0 = -\mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|_2$ och hastighetsvektorn kan då skrivas $v_0 \mathbf{k}_0$. Det okända hastighetsvärdet v_0 bestäms ur randvillkoret att kometens x -koordinat vid x -axelpassagen ska vara 75. Det blir ett randvärdesproblem för ode-systemet.

Stoftpartiklarna kastas iväg från kometen i samma riktning och med samma hastighet som kometen har. Det är partikelstorleken som avgör om dess bana blir rätlinjig ("kritisk storlek"), utåtkrökt (små stoftkorn) eller inåtkrökt (stoftkorn, större än de kritiska). De rätlinjiga banornas partiklar flyttar sig med konstant hastighet, därför kan stoftpositionen i observationsögonblicket bestämmas. Beräkna och rita stoftsvanskurvan som dessa partiklar bildar.

De större stoftpartiklarna kommer att följa en kurva av kometbanekaraktär, som definieras av samma ode-system men med ett C -värde mindre än 1. Startvärdena i utkastpunkten bestäms av kometdata just där. Pröva C -värden mellan 0.02 och 0.1. Markera var de hamnar i observationsögonblicket och bidrar till stoftsvansen.

De små kometdammpartiklarnas utåtkrökta banor kan modelleras av kvadratiske bézierkurvor. Fundera ut lämplig algoritm och markera deras bidrag till stoftsvansen.

3B.22: Diffraktionsmönster

När man låter ljus eller andra elektromagnetiska vågor passera genom en smal spalt eller förbi en skarp kant uppstår diffraction. På en skärm kan vi se ett diffraktionsmönster som beror av våglängden λ , spaltbredden a och diffraktionsvinkeln θ . För fallet med mycket smal spalt och stort avstånd L till skärmen bestäms diffraktionsmönstrets intensitet I vid positionen ξ på skärmen av

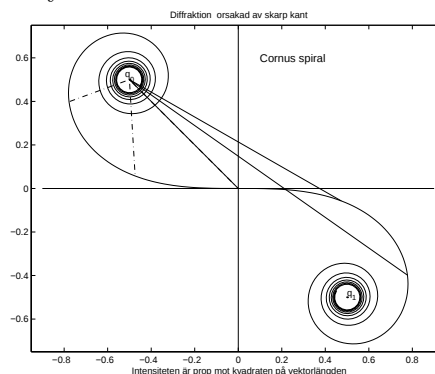
$$I(\xi) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \text{där} \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin |\theta| \approx \frac{\pi a}{\lambda} \frac{|\xi|}{L}, \quad |\xi| \ll d$$

Intensiteten I_0 är maxvärdet som erhålls när vinkeln θ är noll (och på skärmen: $\xi = 0$). Vi kan låta I_0 ha värdet ett. Detta speciella fall av diffraction kallas fraunhoferdiffraction efter den tyske fysikern Joseph von Fraunhofer¹ (1787–1826).

Fresneldiffraction är namnet på en finurlig matematisk algoritm för beräkning av diffraktionsmönster mer generellt. Det kan gälla diffraction orsakad av en skarp kant eller av en spalt eller av ett långsmalt föremål (nål, grässtrå) som kommer i vägen för ljusvågorna. Teorin för fresneldiffraction utvecklades av Augustin Jean Fresnel² (1788–1827), fransk matematiker och fysiker.

Det matematiska redskapet för att åskådliggöra diffractionmönstret är **Cornuspiral**, lussekattskurvan i figuren. Den högra delen av spiralen erhålls som lösning $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u))$, $u \geq 0$ till differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{du^2} &= \pi u \frac{dy}{du}, & x(0) &= 0, & x'(0) &= 1 \\ \frac{d^2 y}{du^2} &= -\pi u \frac{dx}{du}, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 0 \\ \frac{ds}{du} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}, & s(0) &= 0. \end{aligned}$$



Använd RK4 för ode-lösningen fram till $u_{max} = 5$ (eller något längre). Storheten s betecknar båglängden från origo till punkten (x, y) . Rita upp spiralen. Vänstra spiraldelen svarar mot negativa u -värden och fås genom teckenbyte på x - och y -koordinaterna.

Cornus spiral kan även uttryckas med hjälp av de så kallade fresnelintegralerna $x(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi t^2}{2} dt$ och $y(u) = -\int_0^u \sin \frac{\pi t^2}{2} dt$. Teoretiskt gäller $s(u) = u$; visa det! Sambandet innebär att man kan kontrollera tillförlitligheten hos ode-lösningen genom att studera avvikelser mellan beräknad båglängd s och parametern u .

Skarp kant

Vid diffraction orsakad av en skarp kant gäller att intensiteten $I(\xi)$ vid positionen ξ på skärmen beror av båglängdsparametern u på cornuspiralen enligt $\xi = \sqrt{L\lambda/2} u$,

$$I(\xi) = I(\sqrt{L\lambda/2} u) = I_\infty \frac{\|\mathbf{r}(u) - \mathbf{q}_0\|_2^2}{\|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0\|_2^2}$$

Punkten $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u))$ ligger på cornuspiralen, $\mathbf{q}_0$ och $\mathbf{q}_1$ är fixpunkterna (russinens placering i lussekatten): $\mathbf{q}_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ och $\mathbf{q}_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Storheten I_∞ är intensitetsvärdet på skärmen utan diffraction. Vi kan låta $I_\infty = 1$.

¹<http://www.hao.ucar.edu/public/education/sp/images/fraunhofer.html>

²<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Fresnel.html>

Den skarpa kanten finns vid $u = 0$; negativt u innebär att kanten är ett hinder för vågorna, medan $u > 0$ betyder fri passage. Geometriskt sett bestäms intensiteten I av vektorn från $\mathbf{q}_0$ till $\mathbf{r}(u)$ (se figuren) och I -värdet är proportionellt mot kvadraten på vektorlängden. Visa med hjälp av formeln att intensiteten rakt framför kanten vid $\xi = u = 0$ är $1/4$.

Beräkna och rita upp intensitetskurvan då $L = 0.15$ m och $\lambda = 640$ nm.

Kurvan har många toppar — bestäm de båda första maximipunkternas positioner med stor noggrannhet.

När man har kolumnvektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{I}$ får man diffraktionsmönstret med `pcolor(x*[1 1], ones(size(x))*[0 1], I*[1 1], colormap gray, shading flat`

Smal spalt

Även här bestäms intensiteten av en vektor på Cornus spiral. Spaltbredden a har betydelse, olika bredder ger olika diffraktionsmönster. Fresnels algoritm börjar med en transformering av a till båg-längdsparametervärde, $u_a = a/\sqrt{L\lambda/2}$.

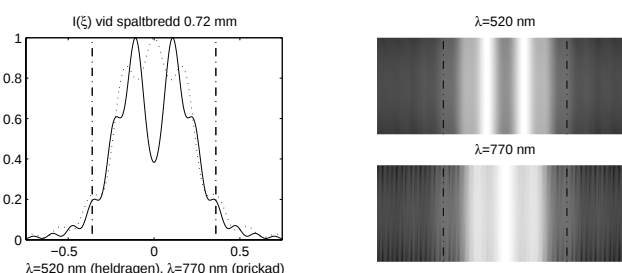
Intensitetsbestämmande vektor på spiralen är $\mathbf{g}(u) = \mathbf{r}(u + \frac{u_a}{2}) - \mathbf{r}(u - \frac{u_a}{2})$. Det innebär att det alltid är konstant båg-längd u_a längs spiralen från punkten $\mathbf{r}(u - \frac{u_a}{2})$ till punkten $\mathbf{r}(u + \frac{u_a}{2})$.

$$I(\xi) = I(\sqrt{L\lambda/2} u) = c \|\mathbf{g}(u)\|_2^2, \quad u \geq 0$$

Med konstanten $c = 1/\max \|\mathbf{g}(u)\|_2^2$ blir intensitetens maxvärde ett. Av symmetriskäl gäller $I(-\xi) = I(\xi)$.

Beräkna och rita intensitetskurvor och diffraktionsmönster för spaltbredderna 0.24, 0.48, 0.72 mm och för våglängderna 400, 520, 640 och 770 nm.

Skärmavståndet är $L = 0.15$ m,



Hur väl överensstämmer fraunhoferdiffraktionens intensitetskurva med fresnel-diffraktionens? Undersök detta för våglängderna 400 och 770 nm vid minsta spaltbredden 0.24 mm.

Skuggan av ett strå

Det uppstår ett diffraktionsmönster av omvänt slag då en nål eller ett smalt strå med bredden a tvingar ljusvågorna att böja av. Skuggan på skärmen bildar ett diffust randmönster. Nu är det två vektorer på Cornus spiral som bestämmer intensiteten nämligen $\mathbf{g}_0(u) = \mathbf{r}(u - \frac{u_a}{2}) - \mathbf{q}_0$ och $\mathbf{g}_1(u) = \mathbf{q}_1 - \mathbf{r}(u + \frac{u_a}{2})$, där liksom tidigare $u_a = a/\sqrt{L\lambda/2}$.

$$I(\xi) = I(\sqrt{L\lambda/2} u) = c \|\mathbf{g}_0(u) + \mathbf{g}_1(u)\|_2^2, \quad u \geq 0, \quad I(-\xi) = I(\xi).$$

Normeringskonstanten c bestäms antingen så att maximalt intensitetsvärde blir ett eller så att intensiteten långt från stråskuggan blir ett.

Beräkna och rita intensitetskurvor och diffraktionsmönster. Ta samma bredder och våglängder som tidigare.