Övning 1 (2011-11-03)

1 Ickelinjärt ekvationssystem

(*Heath*)

Givet är det icke-linjära ekvationssytemet

$$\begin{aligned} sin(x) + y^2 + log(z) &= 3 \\ 3 * x + 2^y - z^3 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^3 &= 6 \end{aligned}$$

Givet en startgissning, skissa en MATLAB kod för att kunna bestämma en lösning med hjälp av Newtons metod.

2 Egenvärden

Förskjutningen som vi beräknar i Miniprojekt 1 beskriver jämviktsläget när noderna utsattes för yttre krafter. Allmänt kommer kraften på varje nod vid förskjutningen $\mathbf{x}$ ges av $\mathbf{F_{nod}} = -A\mathbf{x}$. I det dynamiska (tidsberoende) fallet följer $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$ Newtons andra lag, vilken därför blir

$$\mathbf{F_{nod}} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + A\mathbf{x} = 0,$$

där m är en effektiv massa för noderna (en liten förenkling av verkligheten).

Antag att $m = 1$. Visa att om λ, $\mathbf{y}$ är ett egenvärde respektive en egenvektor till A, så är

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \sin\left(t\sqrt{\lambda}\right)\mathbf{y},$$

en lösning till differentialekvationen.

3 Potensmetoden

(*Bradie, p.277, ex. 4.1.1*)
Givna är

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utför tre iterationer med potensmetoden som i exemplet 4.2 på sidan 267 (*Bradie*). Använd max-normen $||x||_\infty = \max_i |x_i|$.

4 LU Faktorisering

- Beräkna LU faktoriseringen av

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

- (*Bradie, p.201, ex.3.5.1*) Visa att algoritmen för LU faktorisering baserad på Gausselimination kräver $\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$ aritmetiska operationer.

  Tips:

  $$1 + 2 + .. + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2} \quad \text{och} \quad 1^2 + 2^2 + .. + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

  Följande algoritm skriver över A med L och U

  Algorithm 1 *LU faktorisering*

  for *i= 1 to n-1*
      for *j = i+1 to n*
          $a_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$
      end for
      for *j = i+1 to n*
          for *k = i+1 to n*
              $a_{jk} = a_{jk} - a_{ji} * a_{ik}$
          end for
      end for
  end for