

Övning 4: Gamla tentor

Interpolation

Varje år kungörs årets rekordpumpa i tidskriften Pumpavännen. Tyvärr är vårt exemplar för år 2007 sönderläst, vi behöver din hjälp att ta reda på hur många kg rekordpumpen vägde då.

Bestäm det tredjegradspolynom som går genom punkterna. Använd en smart ansats och handräkna fram polynomkoefficienterna och pumparekordet år 2007.

År	2005	2006	2008	2009
Rekordvikt i kg	200	208	254	286

Tips:

Det $(n - 1)$ -gradspolynom som går genom n givna punkter bestäms med naiva ansatsen $P(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$ eller bättre med Newtons ansats $P(x) = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + \dots$ som ger triangulärt system.

Ekvationslösning

Givet ekvationen $e^x + ax = 0.5$, där $a > 0$ är en parameter.

1. Formulera Newtons metod för ekvationen och beskriv en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som för $a = 1$ beräknar roten α med 4 korrekta decimaler utifrån startvärdet $x_0 = -0.2$.
2. Om ekvationen skrivs om på formen $x = 0.5 - e^x$ kan fixpunktsmetoden användas. Formulera metoden och avgör om den kommer att konvergera eller inte. Startvärdet x_0 i 1) är en hyfsad approximation till roten $e^{x_0} \approx 0.8$.

Derivata-approximation

i:	1	2	3	4	5
x_i :	0	0.25	0.50	0.75	1
y_i :	0	0.24	0.46	0.68	0.87

Givet en tabell över en funktion $y = f(x)$, där x_i värdena är givna ekvidistant i intervallet $[0, 1]$. Vi vill beräkna en approximation till derivatan i intervallets vänstra ändpunkt, dvs $f'(0)$. För att få högre noggrannhetsordning kan man använda differensformeln

$$f'(x) \approx \frac{-f(x + 2h) + 4f(x + h) - 3f(x)}{2h} \quad (1)$$

Använd Taylorutveckling för att bestämma noggrannhetsordningen för formeln.

ODE: Begynnelsevärdesproblem

$$u'' + u' + u = t, \quad u(0) = 1, u'(0) = 0 \quad (2)$$

$$(3)$$

Skriv om differentialekvationen som ett system på vektorform av två första ordningens differentialekvationer. Ange även begynnelsevektorn.

Numerisk integration

Betrakta sambandet

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-kx^2}}{1+x^2} = 0.5 \quad (4)$$

Problemet att bestämma k kan ses som en syntes av numeriska metoder. Vilka numeriska metoder är lämpliga?