



KTH Engineering Sciences

DN1240 – Problem, metoder och begrepp

Störningsanalys

Problem: Hur påverkar felet i indata felet i utdata?

Metoder: analys via Taylorutveckling, experimentell störningsräkning

Begrepp: absolutfel, relativfel, felgräns, kondition (välkonditionerad/illa konditionerad), konditionstal, rättställdhet

Olinjära ekvationer

Problem: Lös ekvationen (ekvationssystemet)

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Metoder: intervallhalvering, fixpunktiteration, Newtons metod, sekantmetoden

Begrepp: iteration, konvergens, konvergensordning

Linjära ekvationsystem

Problem: Lös ekvationsystemet

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, b \in \mathbb{R}^n.$$

Metoder: Direkta: gausselimination för LU-faktorisering (med/utan pivotering), bakåtsubstitution, snabbare metoder för bandade system,

Iterativa: Jacobi, Gauss–Seidel

Begrepp: komplexitet/beräkningskostnad, glesa ekvationssystem, bandade ekvationssystem, vektor- och matris-normer, (konditionstal, se störningsanalys)

Eigenvärden

Problem: Beräkna egenvektorer och eigenvärden,

$$Ax = \lambda x, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Metoder: Potensmetoden

Interpolation

Problem: Givet noderna $x_0, x_1, \dots, x_n$ och $f(x)$, hitta enkel funktion $\phi(x)$ (oftast polynom) så att

$$\phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

Metoder: polynominterpolation (Vandermonde-matris/Newtons ansats) med ekvidistanta noder, styckvis linjär interpolation, kubiska splines, icke-ekvidistanta noder (Chebyshev-interpolation)

Begrepp: noggrannhetsordning (för styckvis interpolation), Runges fenomen

Minstakvadratanpassning

Problem: Givet $x_0, x_1, \dots, x_n$ och $f(x)$, hitta ett polynom $\phi(x)$ av gradtal $m < n$ så att

$$\sum_{j=0}^n (\phi(x_j) - f(x_j))^2$$

minimeras. Mer allmänt kan $\phi(x)$ vara en funktion som beror på m parametrar över vilken summan ska minimeras.

Metoder: normalekvationerna, Gauss–Newton

Begrepp: felkvadratsumman

Derivering

Problem: Givet funktionsvärden i diskreta punkter $\{x_j\}$, approximera derivator i punkterna

$$f'(x_j), f''(x_j), \dots$$

Metoder: framåtdifferens och bakåtdifferens för förstaderivatan, centraldifferens för första- och andraderivatan

Begrepp: noggrannhetsordning

Integration

Problem: Beräkna integralen

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Metoder: trapetsregeln, Simpsons formel (enkla och sammansatta)

Begrepp: adaptivitet, noggrannhetsordning, (degree of precision)

Ordinära differentialekvationer

Problem: Beräkna $y(t)$ så att

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad f : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Även mer allmänna högre ordnings ODE:

$$\frac{d^p y}{dt^p} = f(t, y, y', \dots, y^{(p-1)}), \quad y^{(j)}(0) = y_{0,j}, \quad j = 0, \dots, p-1.$$

Metoder: Framåt Euler (e,1), Bakåt Euler (i,1), Trapetsregeln (i,1), Mittpunktsmetoden (i,+), Runge–Kutta 4 (e,1). Implicita (i) vs explicita (e) metoder. Enstegs- (1) vs flerstegsmetoder (+). Omskrivning av hög ordnings ODE till första ordnings system.

Begrepp: noggrannhetsordning, lokalt trunkationsfel vs globalt fel, konvergens, adaptivitet, absolutstabilitet, stabilitetsområden, styva ODE

Randvärdesproblem

Problem: Beräkna $u(x)$ så att

$$u_{xx} = f(x, u, u_x), \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta.$$

alternativt,

$$u_x(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta.$$

Metoder: finita differenser, (finita elementmetoden), inskjutningsmetoden