

LABORATION 2

Tillförlitlighet, integraler, ekvationer, differentialekvationer

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper). Sista dag för bonuspoäng: 11/3 2011.

1. Numerisk integration

Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

$$y(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x -axeln och rotationsvolymen är $V = \pi \int_0^L y^2 dx$. Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2$. Börja med trapetsregeln med steglängderna 0.1 och 0.05 och extrapolera en gång så att simpsonvärdet erhålls. Hur många siffror verkar tillförlitliga?

Pröva sedan MATLABS `quad` med standardtolerans (gör `help quad`).

En fin tredimensionell lurbild gör man så här: Låt x och f vara kolumnvektorer för kon-
turkurvan $y(x)$. Skapa en radvektor för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, t
ex $2\pi/30$. Bilda matriser X , Y och Z :

$$X=x*\text{ones}(\text{size}(f_i)); Y=f*\cos(f_i); Z=f*\sin(f_i);$$

Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller `surf(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur.

Uppgift 1 godkänd (datum, lärarsign):

Namn:

2. Ellipsens omkrets på olika sätt

För en ellips med halvaxlarna a och b bestäms omkretsen av uttrycket

$$Omkrets = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 v} dv.$$

Integrandfunktionen är periodisk. Vad är perioden?

Låt $a = 10$ och beräkna omkretsen med stor noggrannhet för fyra ellipser med följande värden på halva lillaxeln: $b = 7, 5, 3, 1$.

Rita upp ellipserna; använd parameterformen som för en ellips med centrum i (x_c, y_c) och halvaxlarna a och b lyder

$$x_{\text{ellips}}(\varphi) = x_c + a \cos \varphi, \quad y_{\text{ellips}}(\varphi) = y_c + b \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Den indiske självlärd matematikern Srinivasa Ramanujan (1887–1920) föreslog följande approximativa formel för ellipsens omkrets:

$$O_{Ramanujan} = \pi(a+b) \left(1 + \frac{3c}{10 + \sqrt{4-3c}} \right) \quad \text{där } c = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Hur bra är den? Beräkna avvikelsen mellan integralvärdet och ramanujanvärdet i de fyra fallen.

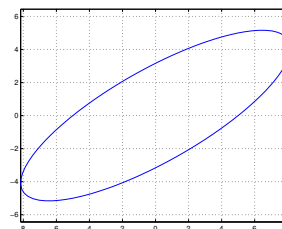
Uppgift 2 godkänd (datum, lärarsign):

Namn:.....

3. Skärning mellan ellipser, icke linjärt ekvationssystem

Beräkna alla skärningspunkter mellan den sneda ellipsen som definieras av $0.4x^2 + y^2 - xy = 10$ och den ellips med centrum i $(4, 2)$ och halvaxlarna $a = 4$ och $b = 6$ (parallella med koordinataxlarna) som beskrivs av

$$(x-4)^2/a^2 + (y-2)^2/b^2 = 1.$$



Ellipserna ska ritas¹ och de erhållna skärningspunkterna markeras med en ring. Hur är det med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm.

Uppgift 3 godkänd (datum, lärarsign):

Namn:

4. Bästa cirkelanpassning, icke linjär modell

Vi vill anpassa en cirkel till punkterna $(1.1, 0.7)$, $(1.5, 1.9)$, $(2.2, 3.1)$, $(3.2, 3.0)$, $(4.5, 2.3)$, $(4.8, 1.0)$, nu med cirkeln skriven på formen $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$.

Det leder till ett överbestämt icke linjärt ekvationssystem. Använd Gauss-Newtons metod för lösningen.

Skriv i varje iteration ut värdet på det uttryck som minimeras i Gauss-Newtons metod. Rita upp de givna punkterna och den bästa cirkeln.

Uppgift 4 godkänd (datum, lärarsign):

Namn:.....

5. Differentialekvationer — begynnelsevärdesproblem

Givet är differentialekvationsproblemet

$$y'' + \pi y e^{x/3} (2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) - y/9 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1/3.$$

Inför nya variabler $u_1 = y$ och $u_2 = y'$ så att differentialekvationen kan skrivas till ett system av två första ordningens ODE. Utnyttja MATLABS `ode45` för numerisk lösning

¹Den sneda ellipsen skrivs bäst i polär form inför uppritningen.

fram till $x = 2$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6} .

Rita upp lösningskurvan och jämför den med lurkonturen i uppgift 1.

Om man utöver u_1 och u_2 inför u_3 med egenskapen $du_3/dx = \pi y^2 = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer.

Vilken innebörd har den nytillkomna ekvationen? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2$. Verkar det bekant? Förklara den geometriska innebörden av resultatet.

6. Differentialekvationer — randvärdesproblem

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L och med tvärsnittsarean A .

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = Q(x), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \quad (1)$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L . Konstanten k är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymnsenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Antag att $L = 2$ [m], $k = 2.5$ [J/(K · m · s)], $T_0 = 300$ [K], $T_L = 400$ [K] och $Q(x)$ [J/(s · m³)] är funktionen

$$Q(x) = 300e^{-(x-\frac{L}{2})^2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

Differentialekvation och randvillkor (1) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$, där $h(n+1) = L$ och approximerar andraderivatan med centradifferens erhålles

$$\frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{k}Q(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Diskretiseringen leder till ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b \quad (4)$$

där A är en $n \times n$ -matris, T är en $n \times 1$ -vektor med temperaturvärden i det inre av intervallet och b är en $n \times 1$ -vektor som beror av bl a randvärdena T_0 och T_L samt $Q(x_i)$ -värdena.

a) Skriv ner matrisen A för $n = 4$ med **papper och penna**. Vilken struktur har matrisen A ?

b) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet. Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Matrisen skapar du i Matlab på följande sätt:
`e = ones(n,1); A = spdiags([-e 2*e -e], -1:1, n,n);`

Kommandot `spdiags` är ett kommando för att skapa glesa matriser. Gör (`help spdiags`) för mer information.

Med MATLAB-satsen `Afull=full(A)` skrivs matrisen A ut på vanlig form. Gör det för $n = 4$ och jämför med resultatet i uppgift a).

Räkna ut temperaturen T för fallet $N = 249$. Lösningen får du genom att lösa det linjära ekvationssystemet $AT = b$ i Matlab med `\`. Lösningen T kommer att innehålla temperaturen i alla punkter x_i utom i randpunkterna.

Plotta temperaturen som funktion av x på hela intervallet $0 \leq x \leq L$.

Hur stor är den minimala och maximala temperaturen? (Plocka fram det minsta och största värdet i vektorn T).

Laboration 2 redovisad och helt klar!

Datum:

Godkänd av:

Namn: