

F10

- Partiella differentialekvationer

Exempel

Black-Scholes-Merton för prissättning av optioner $V(x,t)$:

x : pris på underliggande papper (aktie, ...)

σ : volatilitet

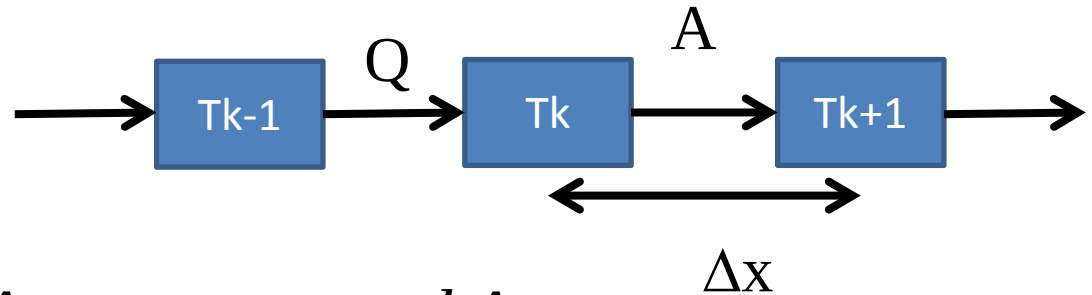
r : riskfri ränta

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + xr \frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0$$

PDE, I: Begynnelsevärdesproblem

Värmeledning enligt

Fourier: $Q = -k \, dT/dx$

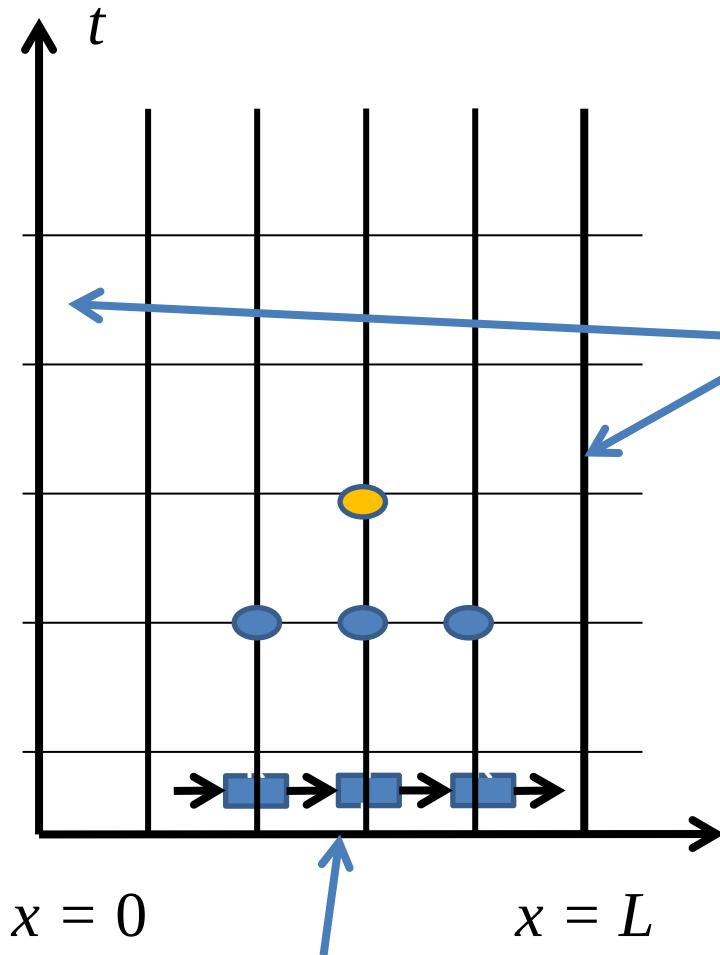


$$\underbrace{\rho A \Delta x C}_m \frac{dT_k}{dt} = -\frac{kA}{\Delta x} (T_k - T_{k-1}) + \frac{kA}{\Delta x} (T_{k+1} - T_k)$$



$$\rho C \frac{dT_k}{dt} = k \frac{T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1}}{\Delta x^2} \Rightarrow \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho C} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

PDE, II



Rand-villkor

$$T(0,t) = T_L, T(L,t) = T_R$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho C} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \Rightarrow$$

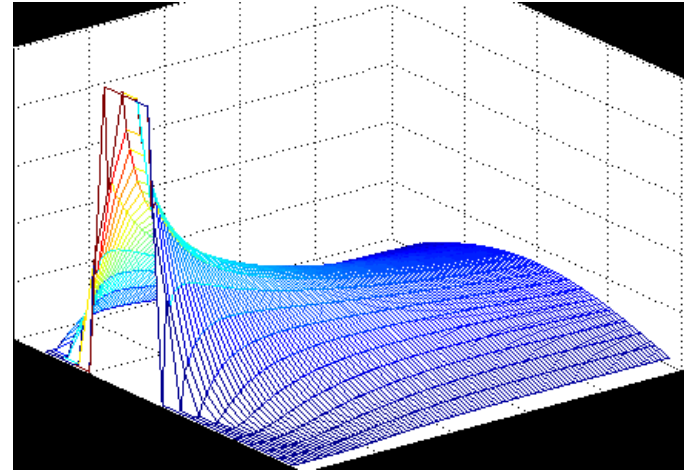
$$T_k^{n+1} = T_k^n + \frac{k\Delta t}{\rho C \Delta x^2} (T_{k-1}^n - 2T_k^n + T_{k+1}^n)$$

Begynnelsvillkor:

$$T(x,0) = f(x)$$

PDE, III

```
n = 20;  
x = linspace(0,1,n);  
dx = x(2)-x(1); dx2 = dx*dx;  
TL = 0; TR = 0;  
T = zeros(n-2,1);  
T(x > 0.5 & x < 0.7) = 1;  
dt = 0.001;  
Ttab = zeros(n-2,100); Ttab(:,1)=T;  
for n = 1:99  
    Ttab(:,n+1) = Ttab(:,n) + ...  
    dt*diff(diff([TL;Ttab(:,n);TR]))/dx2;  
end  
mesh(Ttab)
```



Prova större dt

PDE, IV

Taylorutveckling: Lokalt fel $O(\Delta t^2 + \Delta x^2 \Delta t)$,

Globalt ... $O(\Delta t + \Delta x^2)$, om metoden är **stabil**:

Begränsad felfortplantning ("ränta på gamla fel")

$$T_k^{n+1} = (1 - 2\lambda)T_k^n + \lambda(T_{k-1}^n + T_{k+1}^n), \lambda = \frac{k\Delta t}{\rho C \Delta x^2}$$

$$\begin{aligned} |T_k^{n+1}| &\leq (1 - 2\lambda)|T_k^n| + \lambda(|T_{k-1}^n| + |T_{k+1}^n|) \\ &\leq (1 - 2\lambda + \lambda + \lambda) \max_j |T_j^n| = \max_j |T_j^n| \end{aligned}$$

om $\lambda < 1/2$:

Kräver Δt prop. mot Δx^2

PDE, V

Baklänges Euler istället

$$(1 + 2\lambda)T_k^{n+1} - \lambda(T_{k-1}^n + T_{k+1}^n) = T_k^n$$

Stabil (i L^2) för alla $\lambda > 0$ men kräver lösning av stort ekvationssystem i varje steg

MATLAB: **ode15s** utvecklad just för sådana problem.

Formulera som $\frac{d}{dt}\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \frac{k}{\rho C \Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \frac{k}{\rho C \Delta x^2} \begin{pmatrix} TL \\ 0 \\ \dots \\ TR \end{pmatrix}$$

F11

Gamla tentor

- Q&A