

F2

- Avslutning, inledning om Newton-Raphson:
"Division utan division" – kvadratisk konvergens

MATLAB

- Känslighetsanalys – felfortplantning
Nomenklatur, konditionstal *för problem*

- Linjära ekvationssystem

Formulering, ex. NAM/blandning NAM p 7

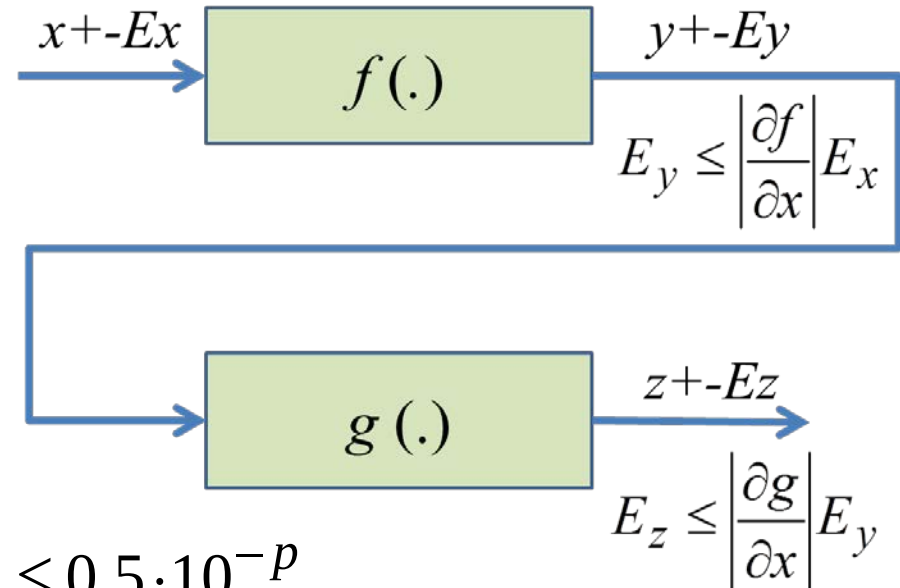
Tidsåtgång, MATLAB

Gauss-elimination, glesa system: TRID, NAM p 9

Känslighetsanalys, NAM p 10

Känslighetsanalys – felfortplantning

- Närmevärde x' till x .
- Absolut fel $x' - x$, relativt fel $(x' - x)/x$
- Fel**gränser**: absolut fel $x = x' \pm E_x$



- x' har p korrekta decimaler om $E_x \leq 0.5 \cdot 10^{-p}$

- Vad vet vi om x' har p korrekta siffror?

$$x' \cdot 10^n, 0.1 < |x'| < 1, \text{ fel} < 0.5 \cdot 10^{-p}$$

$$\text{Relativfel} < \frac{0.5 \cdot 10^{-p}}{0.1} = 0.5 \cdot 10^{-p+1}$$

- Analysera EXS 8.5, 8.1

$$z = \sqrt{4318} - \sqrt{4317}$$

Inverkan av indata-fel

$$y = f(x)$$

$$f(x + \delta) - f(x) = f'(x) \cdot \delta + O(\delta^2) \text{ då } \delta \rightarrow 0$$

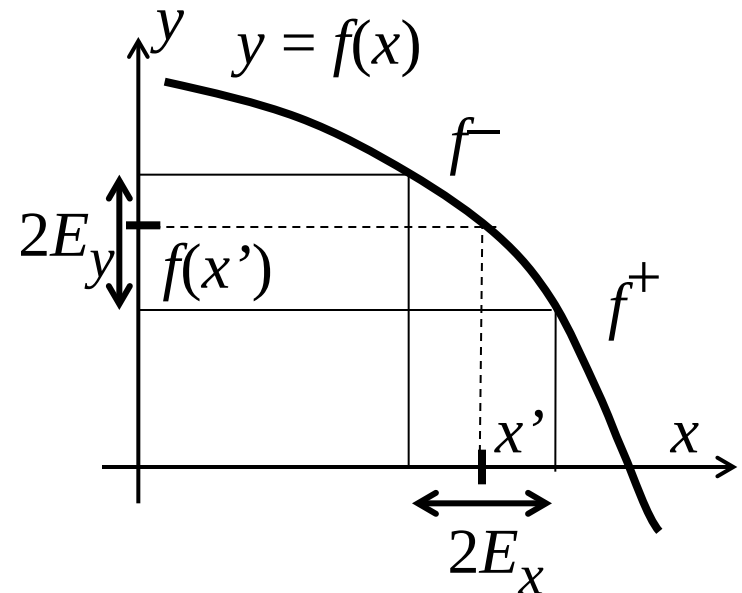
$$|\delta| \leq E_x \Rightarrow |f(x + \delta) - f(x)| \leq |f'(x)| \cdot E_x (+O(E_x^2))$$

$$E_y \leq |f'(x)| \cdot E_x$$

Alternativ ”Instängning”,

Om svårt att derivera f :

1. Beräkna
2. $f^+ = f(x' + E_x)$ och $f^- = f(x' - E_x)$;
3. $y = 1/2(f^+ + f^-)$;
4. $E_y = |f^+ - f^-|/2$



Flera oberoende variabler:

Taylors formel för flera oberoende variabler, här tre st.,

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} h_3 + O(h^2)$$

ger "felfortplantningsformeln" för n oberoende variabler,

$$E_f \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \cdot E_{x_k}$$

Instängning med n oberoende variabler kräver **MÅNGA** f -beräkningar:

$$f(x'_1 + s_1 E_{x_1}, x'_2 + s_2 E_{x_2}, \dots, x'_n + s_n E_{x_n})$$

där s_k tar värden +1 och -1. Det blir 2^n olika kombinationer att gå igenom och hitta max. och min.

Differensapproximation, NAM 1.3

Felkällor:

- Fel i indata
- Avrundningsfel: ändligt antal siffror i räkningarna
- Trunkeringsfel: förtida avbrott av gränsvärdesprocess.

Exempel

1. Seriesumma (cf. 1-variabelkurs)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^N}_{S_N} + R_N, |R_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |x|^n = x^{N+1} \cdot \frac{1}{1-|x|}$$

2. Iteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \text{ stanna när } |x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

3. Differens-approximation av derivata (integral, lösning till diff. ekvation, ...)

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \underbrace{h \cdot \frac{f''(x)}{2}}_{\text{Trunkeringsfel}} + O(h^2)$$

NAM 1.3

1. Härled trunkeringsfelet R för differensapproximationen

$$D_1(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + R$$

Taylor-utveckling av f runt x ger

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x) + O(h^3) - f(x)}{h} = \\ &= f'(x) + \underbrace{\frac{h}{2} \cdot f''(x) + O(h^2)}_R \end{aligned}$$

Om (dominerande delet av) felet är proportionellt mot h^p kallas formeln noggrann av ” p :te ordningen”. $p = 1$ kallas ”linjär”

NAM 1.3, forts

Tabellen i boken visar beräknade värden för $f(x) = e^x$ med $x = 1$ med precision 8 decimaler. Det visar, att felet minskar med h till h blir 10^{-4} , sedan ökar det igen för att för $h = 10^{-8}$ bli e – differensen blir precis 0. Vi ska ge en analys som visar detta.

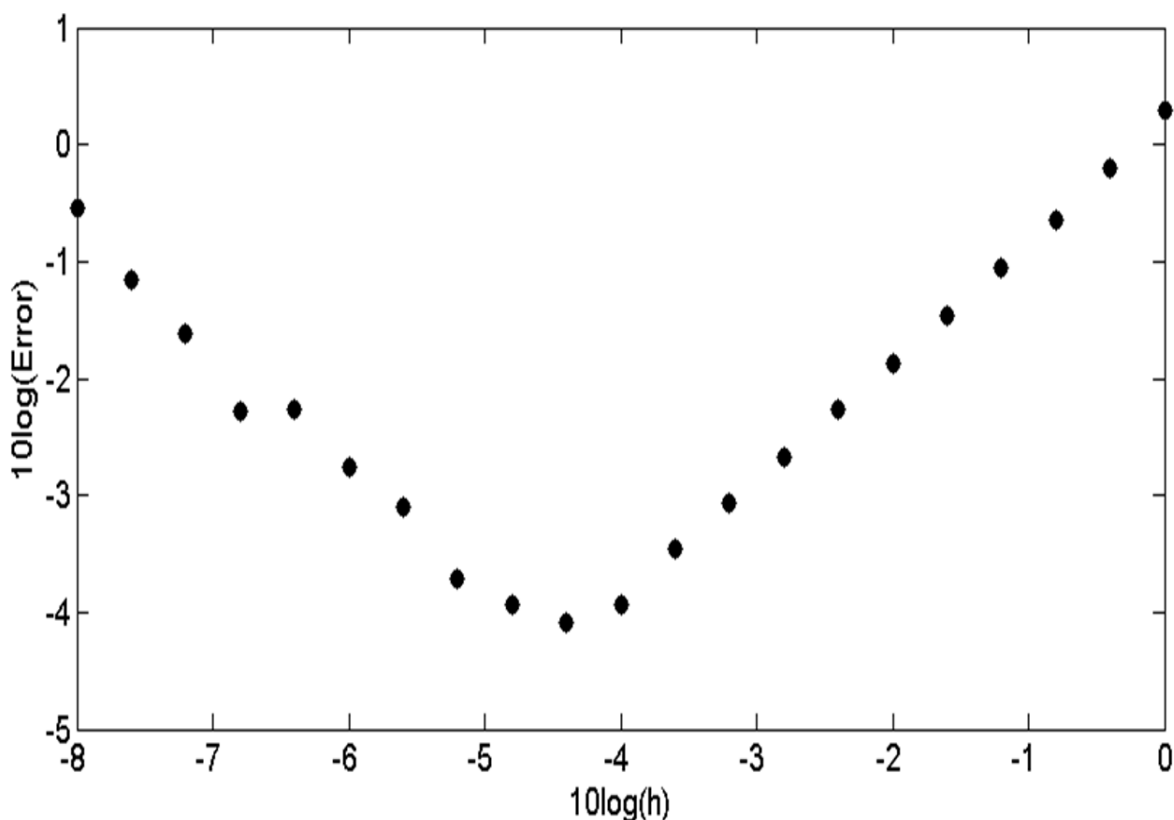
Antag, att funktionen kan beräknas med ett fel som begränsas av E_f ($= 0.5 \cdot 10^{-8}$). Skillnaden kan få fel $2E_f$. Då blir totala felet begränsat av summan av trunkeringsfel och avrundningsfel:

$$E_{tot}(h) = \frac{h}{2} \underbrace{f''(x)}_{e^1} + \frac{2E_f}{h}$$

som växer som $1/h$ då $h \rightarrow 0$ och som h då h växer. Minimum antas för

$$h = \sqrt{\frac{4E_f}{e}} \approx 1.2 \cdot 10^{-4}$$

Här är en log-log plot av resultaten (något fler punkter än i boken)
Lutningen för små h är -1 och för stora h $+1$. Formeln för
”optimalt” h ger $h = 1.2 \cdot 10^{-4}$ – stämmer bra!



EXS 8.1

Beräkna

$$z = \sqrt{4318} - \sqrt{4317},$$

med

$$\sqrt{4317} = 65.7039, \sqrt{4318} = 65.7115$$

kvadratrötter
från tabell

$$z \approx 0.0074$$

med fyra

korrekta

decimaler.

Hur stort

relativt fel blir

det i z?

Vi har relativa fel i kvadratrötterna på $8 \cdot 10^{-7}$,
max. absolut fel i z på $1 \cdot 10^{-4}$ och
relativt fel $10^{-4} / 0.0074 = 0.014$

Stor noggrannhetsförlust som kommer
av *kancellationen*, subtraktionen av två
nästan lika stora tal. Bättre:

$$\begin{aligned} z = \sqrt{4318} - \sqrt{4317} &= \frac{(\sqrt{4318} - \sqrt{4317}) \cdot (\sqrt{4318} + \sqrt{4317})}{\sqrt{4318} + \sqrt{4317}} = \\ &= \frac{4318 - 4317}{\sqrt{4318} + \sqrt{4317}} = \frac{1}{131.4} \end{aligned}$$

Vi får, med $M = 4317 \gg 1$

$$z = \sqrt{M+1} - \sqrt{M} = \frac{1}{\sqrt{M+1} + \sqrt{M}}$$

Om kvadratroten beräknas med max absolut fel E
ger felfortplantningsformeln:

$$\begin{aligned} E_z &\leq \frac{2E}{(\sqrt{M+1} + \sqrt{M})^2}, \\ R_z &= \frac{E_z}{z} \leq \frac{2E(\sqrt{M+1} + \sqrt{M})}{(\sqrt{M+1} + \sqrt{M})^2} = \\ &= \frac{2E}{\sqrt{M+1} + \sqrt{M}} \approx R\sqrt{} \end{aligned}$$

dvs. z kan beräknas med
samma relativa
fel som kvadratrötterna

Division utan division – analys.

$$f(x) = 1/x - a; f' = -1/x^2$$

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

Vi vill se hur x_n konvergerar mot $1/a$ och betraktar felet $E_n = 1/a - x_n : \dots$

$$1/a - x_{n+1} = 1/a - 2x_n + ax_n^2 = a(1/a - x_n)^2 :$$

$$E_{n+1} = aE_n^2$$

med $l_n = \ln E_n$ får vi

$$l_{n+1} = 2l_n + \ln a$$

För tillämpningen på division av binära flyttal är bara $1/2 < a < 1$ intressant, så vi tar $a = 1$ och $l_0 = -1$;

$$l_n = -2^n: \quad E_n = e^{-2^n}$$