

F3

Olinjära ekvationer, Newton-Raphson NAM6.5

Konvergens-ordning

Startpunkt, avbrottskriterium

Grovlokalisering

Julia-mängd

(Sekantmetoden, konvergens-ordning)

Linjära ekv. syst, känslighet NAM1.5-8 (ej 1.6.2)

(Minstakvadrat-metoden)

Newton-Raphson: Analys, I

Sats: (NAM p76)

Antag, att i ett intervall I omkring ett enkelt nollställe α till f det gäller att

- f har två kontinuerliga derivator

- $$\max_{x,y \in I} \left| \frac{f''(x)}{2f'(y)} \right| \leq m$$

- x_0 är tillräckligt nära α

så konvergerar x_j kvadratisk mot α :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{j+1} - \alpha}{(x_j - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

Sats:

Om α är p -tippel rot gäller istället linjär konvergens

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{j+1} - \alpha}{x_j - \alpha} = \frac{1-p}{p}$$

Newton-Raphson: Analys, II

När ska iterationen avbrytas?

När $|x_n - \alpha| < tol$ är felet mindre än tol . Man kan visa:

Om $m|x_n - x_{n-1}| \ll 1$ så är $|x_n - \alpha| < m|x_n - x_{n-1}|^2$

m kan uppskattas med
om denna verkar ”konstant”

$$m_n = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^2}$$

Exempel 2.7 i exempelsamlingen, I

```
% exs 2.7
```

```
f = @(x) 10*x.^0.1 - x - cos(x) - exp(-x); ← Definition av "funktionspekare"  
fd = @(x) x.^(-0.9) - 1 + sin(x) + exp(-x); ("function handle")
```

```
n = 10000;
```

```
x = linspace(0, 20, n);
```

```
plot(x, f(x), 'k.')
```

```
x = newrap(f, fd, 10, 1e-10, 10)
```

f, fd	funktion och derivata
x	startgissning
tol	tolerans
nit	max antal iterationer

```
function x = newrap(f, fd, x, tol, nit)
```

```
hold = 1;
```

```
for k = 1:nit
```

```
    h = f(x)/fd(x); % alt. h = feval(f,x)/feval(fd,x);
```

```
    x = x - h;
```

```
    disp([x h h/hold^2])
```

```
    if abs(h) < tol*abs(x)
```

```
        break
```

```
    end
```

```
    hold = h;
```

```
end
```

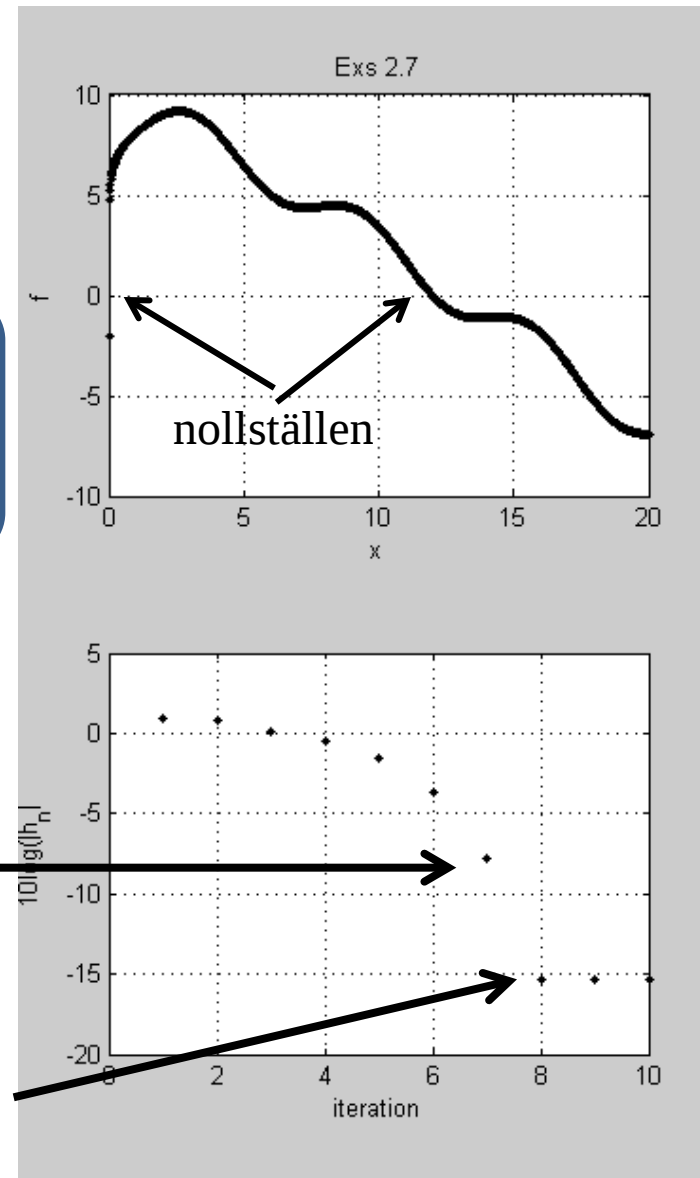
Exempel 2.7 i exempelsamlingen, II

x	h	h/hold^2
1.8722e+001	-9.7216e+000	-9.7216e+000
1.2747e+001	5.9745e+000	6.3216e-002
1.1590e+001	1.1574e+000	3.2426e-002
1.1954e+001	-3.6482e-001	2.7233e-001
1.1984e+001	-2.9267e-002	2.1991e-001
1.1984e+001	-2.4217e-004	2.8272e-001
1.1984e+001	-1.6806e-008	2.8656e-001
1.1984e+001	4.4238e-016	1.5662e+000
1.1984e+001	4.4238e-016	2.2605e+015
1.1984e+001	4.4238e-016	2.2605e+015

Kvadratisk konvergens

$$h_n/(h_{n-1})^2$$

... avrundningsfelen tar över



Julia-mängd, I

Newton-iterationen för att hitta rötter till polynom $p(z)$ av gradtal N , med komplexa rötter r_k , $k = 1, 2, \dots, N$ är

$$z_{n+1} = z_n - p(z_n) / p'(z_n), z_0 \text{ startgissning}$$

För startgissningar z_0 tillräckligt nära en rot konvergerar z_n mot roten. Men hur är det globalt? Definiera

$$R_k = \{z_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = r_k\}$$

Hur ser R_k ut? Vi vet att R_k innehåller en liten cirkelskiva runt r_k , men annars inte just något. Man kan också undra hur *komplementet till unionen av alla R_k* ser ut.

Randen till R_k är en Julia-mängd, medan det inre kallas en Fatou-mängd.

Julia-mängd, II

Vi provar med $p(z) = z^3 + 1, r_k = e^{i(2k-1)\pi/3}, k = 1, 2, 3$
och startar i ett rutnät av
punkter

$$z_{0,a,b}, a, b = 1, 2, \dots$$

För varje iteration
kontrollerar vi vilka z som
kommit nära rot k och målar
dem i färg k .

Algoritm

1. konstruera en $n \times n$ tabell z av komplexa tal
2. gör en Newtoniteration, $z = z - p(z)/p'(z)$
med hela tabellen
3. Bildtabellen $n \times n$ f initieras till 0
4. för $k = 1, 2, 3$
 de $f(a,b)$ där avståndet till r_k är litet sätts till k
5. måla f (alla element är 0 1 2 eller 3)
6. tillbaka till 2



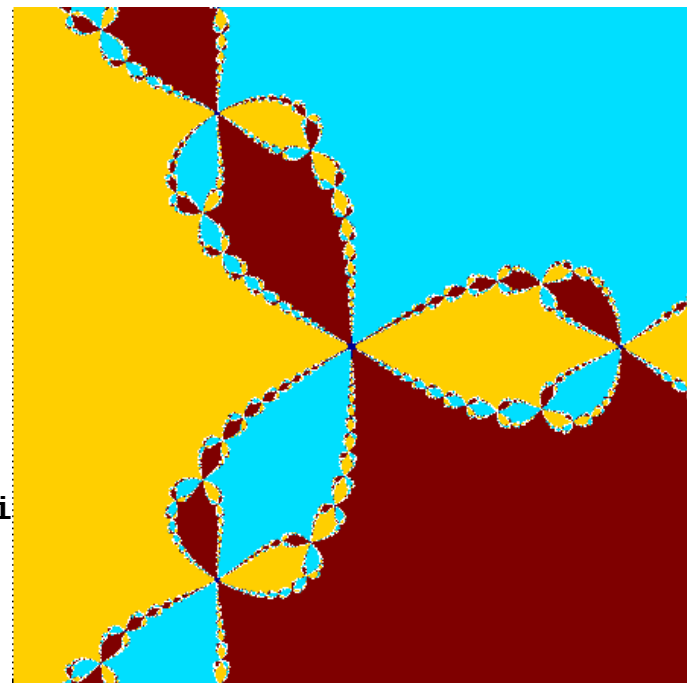
Gaston Julia, 1893–1978

Julia-mängd, III

```
% Newtons metod på komplext polynom
%   z^3 + 1 = 0;
% rötter
%   rk = exp(i(2k-1)pi/3), k = 1,2,3
% startgissning za,b, a,b = 1,..., n
% Rk = mängd zab som ger konvergens mot rot nr k
% Gör bild av Rk!
%-----
n = 500;
x = linspace(-1,1,n);
y = x';
z = ones(n,1)*x + i*y*ones(1,n);

nit = 0;
root = exp((2*(1:3)-1)*i*pi/3);
while 1
    clf
    z = z - (z.^3 + 1)./(3*z.^2);
    nit = nit + 1;
    f = zeros(size(z));
    for k = 1:3
        ind = abs(z-root(k)) < 0.1;
        f(ind) = k;
    end
    surf(x,y,f); shading interp
    view(2)
    axis equal
    title (['Efter ',num2str(nit),' iter.'])
    pause
end
```

% centrum i 0
% d:o
% kvadrat z(1:n,1:n) i
% komplexa talplanet
% iterations-räknare
% rötterna
% oändlig slinga
% sudda
% Newton-iteration
% räkna iterationer
% initiera bild-tabell f
% 3 rötter
% punkter nära en rot
% z=f(x,y)



Linjära ekvationssystem, känslighetsanalys I

NAM 1.4-8, ej 1.6.2

Om vektor- och matris-normer, se NAM p 12.

`norm(x, p)`-funktionen i matlab ger p -normen (OK för $p \geq 1$)

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$$

Vanligast $p = 2$, Euklidisk norm, $p = \infty$: Max-norm

Även $p = 1$ används.

Den till vektor-normen $\|\cdot\|$ hörande

matris-(operator-) normen definieras: $\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$

Då är $\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$ för alla $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}$, etc.

Linjära ekvationssystem, känslighetsanalys II

Vi betraktar nu högerledet $\mathbf{b}$ som indata och lösningen $\mathbf{x}$ som utdata i problemet att lösa $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Det visar sig för vissa matriser $\mathbf{A}$ att små störningar $\delta\mathbf{b}$ i $\mathbf{b}$ ger stora förändringar $\delta\mathbf{x}$ i lösningen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \Rightarrow \delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}.$$

Som mått på känsligheten tar man en övre gräns för kvoten mellan relativ störning i lösningen $\mathbf{x}$ och relativ störning i indata $\mathbf{b}$, konditionstalet $\kappa(\mathbf{A})$

$$\kappa(\mathbf{A}) = \max_{\mathbf{b}, \delta\mathbf{b}} \frac{\|\delta\mathbf{x}\| / \|\mathbf{x}\|}{\|\delta\mathbf{b}\| / \|\mathbf{b}\|} = \dots = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Bevis: $\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b} \Rightarrow \|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta\mathbf{b}\|$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{A}\| \geq \|\mathbf{b}\|$$

Division ger

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{A}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \Rightarrow \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \underbrace{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|}_{\kappa(\mathbf{A})} \cdot \frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Linjära ekvationssystem, känslighetsanalys III

NAM Exempel 3 p 10 & 13

Vi undersöker ”absoluta” känsligheten i $\mathbf{x}$ för störningar i $\mathbf{b}$ med Monte-Carlo metod: Prova många olika ”slumpmässiga” störningar och räkna. I boken provas två, vi gör 5000 och visar ett histogram. Matrisen är den tri-diagonala, som har bara positiva egenvärden

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Som man lätt ser med ett högerled $(1,0,0,0,0)$ blir lösningen lätt 256 gånger större. Men hur mycket större kan den bli? MATLAB på nästa sida

Linjära ekvationssystem, känslighetsanalys IV

```
clear all, figure(1), clf
dia=[1 5 5 5 5]'; % diagonal och
sub=[2 2 2 2]';    % sub- (och super-)diagonal

% sätt ihop matris: diag(x,k) sätter elementen x i
% matris-diagonal nr k (0 = huvuddiagonal, +1 = superdiag.)
A = diag(dia,0)+diag(sub,1)+diag(sub,-1);

% 5 x n matris av pseudoslumptal i (-0.25,0.25)
n = 5000; bpl = (rand(5,n)-0.5)*0.05;

% lös alla n system med Gauss-elim
xpl = A\bpl;

bn = zeros(n,1); nn = bn; % pre-allokering (inte nödvändigt)
for k=1:n
    bn(k)=norm(bpl(:,k)); % norm av störning k
    nn(k)=norm(xpl(:,k)); % norm av lösning k
end

disp([max(nn./bn),norm(inv(A))]) % skriv ut max. kvot och
                                % matris-inversens norm
hist(nn./bn)                    % histogram över kvoterna
```

Linjära ekvationssystem, känslighetsanalys V

Max. kvot	norm(A-1)
=====	=====
443	452

... Jo, matrisinversnormen blev större –
den är ju max över alla möjliga b

