

F4_b

- Interpolation / kurvor / tabeller NAM 3

Kurvor, interpolation, etc. I

Tabell-representation av funktioner:

Givet $\{x_i, f_i = f(x_i)\}, i = 1, \dots, n$ där f är en ”snäll” funktion, oftast antar vi att den har många kontinuerliga derivator.

Beräkna ett närmevärde till $f(x)$ och en uppskattning av möjligt fel.

1. Använd polynom av gradtal m .

Sats Om alla x_i är olika, så finns precis ett polynom av gradtal m som uppfyller $P_m(x_i) = f(x_i), i = 1, \dots, m+1$

- P är linjär funktion av alla f_i
- P kan skrivas på flera olika sätt som ger olika algoritmer och känslighet

Kurvor, interpolation, etc. II

Polynom-representationer

a) "Naiv"

$$P_m(x) = c_1 x^m + c_2 x^{m-1} + \dots + c_m x^1 + c_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} c_k x^{m+1-k}$$

b) "Centrerad"

$$P_m(x) = \sum_{k=1}^{m+1} b_k (x - a)^{m+1-k}$$

med a = medelvärde av alla x .

c) Newton's

$$P_m(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ + a_m(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m)$$

som ger ett direkt bevis för satsen ovan

Kurvor, interpolation, etc. III

Polynom-representationer, forts.

d) Lagrange

$$L_k(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{m+1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{m+1})} =$$

$$= \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{m+1} (x - x_j) / \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{m+1} (x_k - x_j)$$

$L_k(x)$ är ett m -te gradspolynom med $L_k(x_i) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$

så
$$P_m(x) = \sum_{k=1}^{m+1} f(x_k) \cdot L_k(x)$$

Kurvor, interpolation, etc. IV

MATLAB

polyfit, **polyval** med antal punkter = gradtal+1
eller egen konstruktion för Newton-formen.

Tabell-slagning

Interpolation med högt gradtal är mycket känslig, interpolanten tenderar att slingra sig mycket mellan datapunkterna.

Man använder ”styckevis” polynom med gradtal 1 eller 3 istället

Linjär interpolation:

Givet x , välj intervall så att

$x_{i-1} < x \leq x_i$. Då blir

$$P_1(x) = f_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (f_i - f_{i-1})$$

