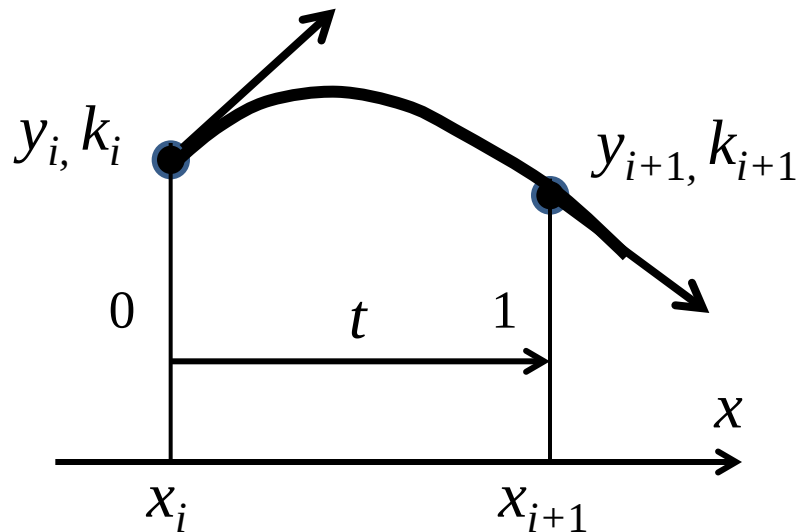


F5

- Splines etc.
- Olinjära ekvationssystem
- Trunkeringsfelsuppskattning:
- Richardson-extrapolation
- Felfortplantning: linearisering, instängning

Kurvor, interpolation, etc. V

Den linjära interpolanten har diskontinuerlig derivata.
Glattare kurva med högre-gradspolynom, vanligen kubiska
Hermite-interpolant, Splines, Bézier-kurvor, B-splines,
NURBS, ...



Kurvor, interpolation, etc. VI

Hermite

Konstruktion av $P(x)$ i intervallet x_{i-1}, x_i som interpolerar till y_{i-1} och y_i och har derivator k_{i-1} och k_i i x_{i-1}, x_i

Se NAM 3.3 ! $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$
 $x = x_i + t \cdot h_i, \quad 0 < t \leq 1$

Följande ansats ger lite mer symmetriska uttryck och hänger ihop med Bézier- (Bernstein) polynomen

$$P(x) = P(x_i + t \cdot h_i) = y_i + t \cdot \Delta y_i + t(1-t)^2 \cdot g_i + t^2(1-t) \cdot c_i$$
$$g_i = h_i k_i - \Delta y_i, c_i = \Delta y_i - h_i k_{i+1}$$

Kurvor, interpolation, etc. VII

Exempel

Parameterkurva $x = P(t)$, $y = Q(t)$, $0 < t < 1$,
kvarts enhetscirkel i första kvadranten:

$$P = \cos \frac{\pi}{2} t, Q = \sin \frac{\pi}{2} t : Q(t) = P(1-t)$$

$$P(0) = 1, P(1) = 0, P'(0) = 0, P'(1) = -\frac{\pi}{2}$$

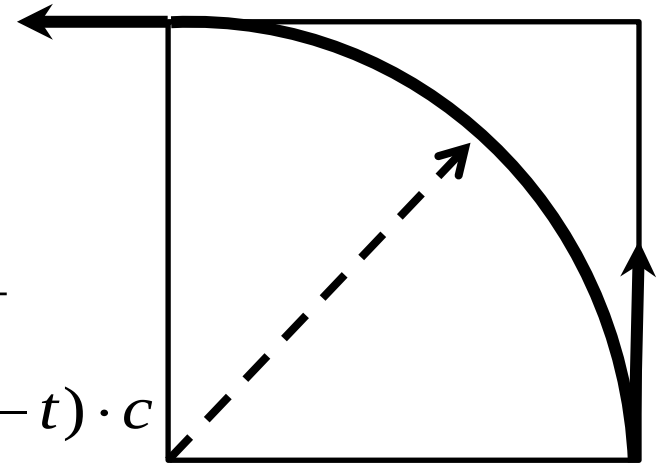
$$P(t) = 1 + t \cdot (0 - 1) + t(1-t)^2 \cdot g + t^2(1-t) \cdot c$$

$$g = 0 - 1, c = 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$P = 1 - t - t(1-t)^2 + t^2(1-t) \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) :$$

$$P(1/2) = Q(1/2) = 1/2 + 1/8 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{8 + \pi}{16}$$

$$r = \sqrt{P^2 + Q^2} = 0.9848$$



Kurvor, interpolation, etc. VIII

Kubiska Splines

Finn den ”glattaste” kurva som passerar (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$

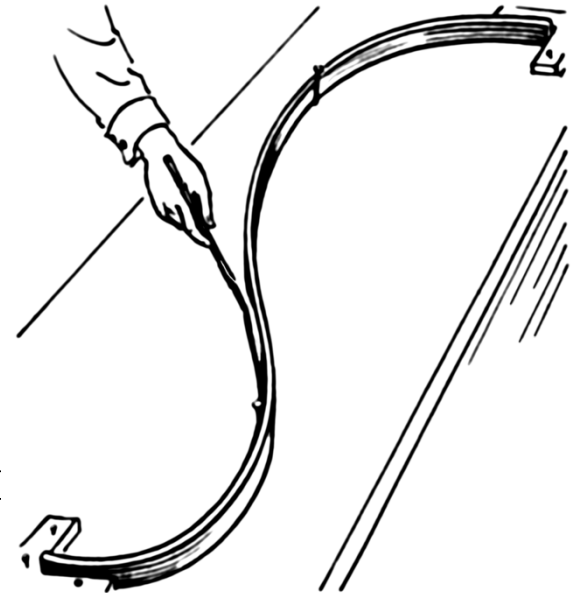
$$\min \int_{x_1}^{x_N} y''(x)^2 dx \quad (*)$$

$$s.t. \quad y(x_i) = y_i, i = 1, \dots, N$$

Man kan visa, att

- $y^{(iv)} = 0$ mellan punkterna, dvs. y styckev. tredjegradspolynom
- y, y', y'' kontinuerliga överallt
- Kubisk spline, Sv. Ri-funktion

Om man väljer lutningarna k_i , $i = 1 \dots N$ i x_i så ger Hermite-interpolanten ett styckev. tredjegradspolynom med y och y' kontinuerliga överallt. Välj k_i så att även y'' blir kontinuerlig! så får man lösningen till (*)



Kurvor, interpolation, etc. IX

$$P_i(x_i + t \cdot h_i) = y_i + t \cdot \Delta y_i + t(1-t)^2 \cdot g_i + t^2(1-t) \cdot c_i$$

$$g_i = h_i k_i - \Delta y_i, c_i = \Delta y_i - h_i k_{i+1}$$

$$P_i''(x_i) = \frac{1}{h_i^2} \frac{d^2 P}{dt^2}(0) = \frac{1}{h_i^2} (-4g_i + 2c_i),$$

$$P_{i-1}''(x_i) = \frac{1}{h_{i-1}^2} \frac{d^2 P_{i-1}}{dt^2}(1) = \frac{1}{h_{i-1}^2} (2g_{i-1} - 4c_{i-1}):$$

$$P_i''(x_i) = P_{i-1}''(x_i), i = 2, \dots, N-1$$

Tri-diagonalt ekvationssystem för k_i

Saknar 2 ekvationer: Randvillkor

- Naturliga splines: $P''(x_1) = P''(x_N) = 0$
- "Not-a-knot": P''' kontinuerlig i x_2, x_N
- Föreskriven lutning: k_1, k_N givna
- Periodisk: $k_N = k_1$ (i rad 1 och $N-2$)

Olinjära ekvationssystem (NAM 6.8)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{f} \text{ i } \mathbf{R}^n$$

Linjarisering av komponent k i $\mathbf{f}$:

$$f_k(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f_k(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \cdot h_n = 0$$

$$\sum_{j=1}^n J_{kj} h_j = f_k(\mathbf{x}) \text{ där } J_{kj} = \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}}$$

som för $k = 1, 2, \dots, n$ sammanfattas
som linjära ekvationssystemet för
korrektions-vektorn $\mathbf{h}$

$$\mathbf{J}\mathbf{h} = \mathbf{f}, \mathbf{J} = \{J_{kj}\}$$

Iterativa metoden:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{h}_n,$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ tills } \|\mathbf{h}_n\| \leq tol$$

Jacobian-matrix NAM 6.9.3

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{J} \quad \quad \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{J}(:,k) \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{ccc}
 x & x & x \\
 x & x & x \\
 x & x & x \\
 x & x & x \\
 x & x & x \\
 x & x & x
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 y \\
 y \\
 y \\
 y \\
 y \\
 y
 \end{array}
 &
 \begin{array}{cc}
 x & x \\
 x & x \\
 x & x \\
 x & x \\
 x & x \\
 x & x
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 *
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{c}
 y \\
 y \\
 y \\
 y \\
 y \\
 y
 \end{array}
 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} k \\ k \end{array}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{J}(:,k) \delta$$

Jacobian-matris NAM 6.9.3

```
function J = jacobian(F,x,steg)
n = length(x);
J = zeros(n,n); % pre-allocering
f = feval(F,x);
for k=1:length(x)
    xplus = x;
    if x(k)==0
        xplus(k) = steg;
    else
        xplus(k) = (1+steg)*x(k);
    end
    J(:,k)=(feval(F,xplus)-f)/(xplus(k)-x(k));
end
```

```
function F = heath(xv)
x=xv(1);y=xv(2);z=xv(3);
f=[sin(x)+y^2+log(z)-3
   3*x+2^y-z^3
   x^2+y^2+z^3-6];
end
```

```
function J = Jan(xv)
x = xv(:);
n = length(xv);
J = x*ones(1,n);
```

```
x0 = [1 2 3]';
delta = 1e-4;
J = jacobian('heath',x0,delta)
Jan = Jan(x0)
norm(J(:)-Jan(:))
```

Fixpunktsiteration NAM 6.6, I

Newton-Raphson's metod är
en stationär en-punktsiteration
av formen

$$x_{n+1} = G(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

Ett x med $x = G(x)$ kallas en fixpunkt (eng. fixed point)

Iterationen kan användas till att hitta fixpunkter.

Om man söker nollställena till $f(x)$ får man konstruera ett G .

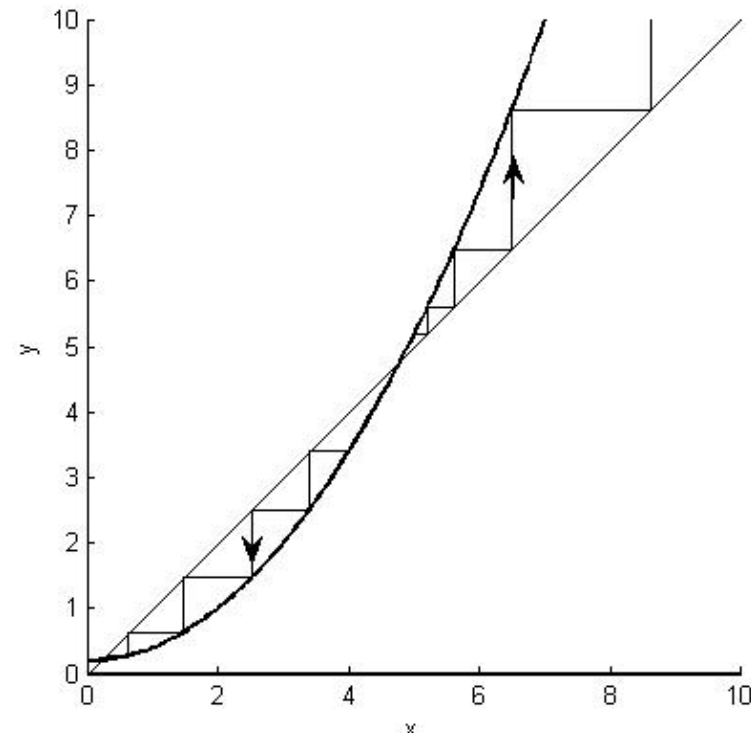
Övning: Hur ser G ut för NR?

Rita kurvorna $y = x$ och $y = G(x)$ och rita

polygontåget där $y_k = G(x_k)$:

$(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+1}), \dots$

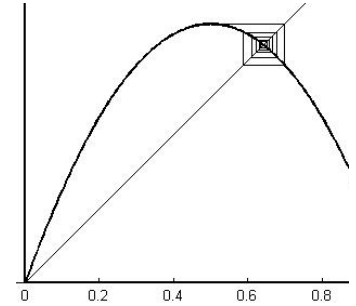
$$G(x) = 0.2 + 0.2x^2$$



Fixpunktsiteration NAM 6.6, II

När G är deriverbar så gäller

$$x_{n+1} - x_n = G'(\xi)(x_n - x_{n-1})$$



Fixpunktssatsen:

Om $|G'(\xi)| \leq m < 1$

för alla ξ i tillräckligt stor omgivning till x_0 så

- Det finns precis en fixpunkt α där
- x_j konvergerar mot α
- Det gäller $|x_n - \alpha| \leq \frac{|m|}{1 - |m|} |x_n - x_{n-1}|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = m$

Konvergensen är alltså linjär om m är skild från noll.

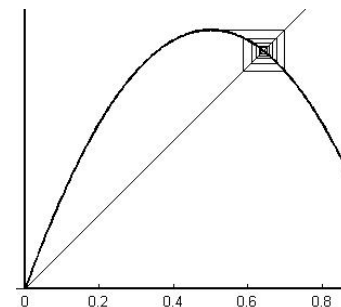
För Newton-Raphson blir $G'(\alpha) = 0$ (visa det!).

$$\alpha \approx x_n + \frac{m}{1-m}(x_n - x_{n-1})$$

Fixpunktsiteration NAM 6.6, III

En långsam konvergens kan snabbas upp med ”feltermsskorrektion”:

$$\alpha \approx x_n + \frac{m}{1-m}(x_n - x_{n-1})$$



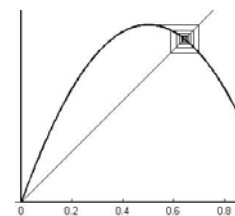
Fixpunktssatsen gäller även avbildningar från t ex $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}^n$.
Om den ”förminskar”,

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{y})\| \leq m\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, m < 1$$

kallas den en *kontraktion*.

Feltermsskorrektion kan inte enkelt användas.

Fixpunktsiteration NAM 6.6, IV



Logistisk ekvation

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), a > 0$$

$$x(a) = 0, 1 - 1/a$$

Vad ger iterationen för olika a ?

- Om $a < 4$ och $0 < x_0 < 1$ kommer alla x_j att ligga i $(0,1)$.
- $G' = a(1-2x)$, $G'(0) = a$ så för $|a| < 1$ konvergens mot 0
- $G'(1-1/a) = -a + 2$ så då $|2-a| < 1$, dvs. $1 < a < 3$ blir det konvergens mot $1-1/a$.

För $a > 3$ är $|G'| > 1$ för alla x i $(0,1)$ så ingen konvergens.

Men talföljden är uppåt och nedåt begränsad

så det måste finnas hopningspunkter, men vilka? Vi illustrerar med att iterera med många x samtidigt, och ser var de hamnar

Fixpunktsiteration NAM 6.6, V

